Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito 3ª Prova **2024**
Data: Sábado, 7 de Dezembro **Turma M3**

Exercício 1 *Observe que γ é uma curva fechada, orientada no sentido antihorário. Segue-se do **Teorema de Green**, que*

$$\begin{aligned}\int_\gamma F \cdot d\gamma &= \int_\gamma x dx + y dy \\ &= \iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(x)\right] dx\, dy \\ &= \iint_\Omega 0 dx\, dy \\ &= 0\end{aligned}$$

sendo Ω o interior da curva γ. ■

Exercício 2 *Seja γ a curva que corresponde à fronteira da região em questão. Uma parametrição possível para esta curva é dada por*

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

sendo

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} ; \quad \frac{\pi}{4} \le t \le \frac{3\pi}{4}$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} ; \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim, a área que deseja-se calcular é dada por

$$\begin{aligned}A &= \int_\gamma x dy \\ &= \int_{\gamma_1} x dy + \int_{\gamma_2} x dy \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^2 t\, dt + \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t\, 0\, dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\ &= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\end{aligned}$$

$$A = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

■

Exercício 3 *O **fluxo** que deseja-se calcular é dado por*

$$\tau = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\gamma$$

*e, o **Teorema da Divergência de Gauss** afirma que*

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\gamma = \iint_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F}\, dx\, dy$$

sendo Ω o interior da curva γ, ou seja

$$\Omega : \begin{cases} 1 - x \le y \le 3 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Além disso, tem-se que

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot (x - y, -x + 2y) \\ &= 3\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\tau &= \int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\gamma \\ &= \iint_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F}\, dx\, dy \\ &= \iint_\Omega 3\, dx\, dy \\ &= 3\, \text{Área}(\Omega) \\ &= \frac{15}{2}\end{aligned}$$

Perceba que Ω é um trapézio de bases 2 e 3 com altura 1. ■

Exercício 4 *Uma parametrização possível para a superfície em questão é dada por*

$$\sigma : \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u \operatorname{sen} v \\ z = 2u^2 \end{cases} ; \underbrace{\begin{matrix} 0 \leq u \leq 2 \\ 0 \leq v \leq 2\pi \end{matrix}}_{\Omega}$$

Donde segue-se que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = (\cos v, \operatorname{sen} v, 4u)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = (-u \operatorname{sen} v, u\cos v, 0)$$

e

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left(-4u^2 \cos v, -4u^2 \operatorname{sen} v, u\right)$$

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| = u\sqrt{16u^2+1}$$

e a área da superfície de σ é dada por

$$\begin{aligned} A &= \iint_\sigma ds \\ &= \iint_\Omega \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du\, dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 u\sqrt{16u^2+1} du\, dv \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{65\sqrt{65}-1}{48} dv \\ &= \frac{65\sqrt{65}-1}{24}\pi \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Observe que a fronteira da superfície σ é a curva Γ com possível parametrização dada por*

$$\Gamma : \begin{cases} x = 0 \\ y = 3\cos t \\ z = 3\operatorname{sen} t \end{cases} ; \ 0 \leq t \leq 2\pi$$

e usando o ***Teorema de Stokes****, segue-se que*

$$\begin{aligned} \iint_\sigma (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, ds &= \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\Gamma \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{r}{\|r\|} \cdot \Gamma' dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \left(x', y', z'\right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \cos t\, dt \\ &= \left. \frac{\operatorname{sen}^2 t}{2} \right|_0^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

■