

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito 2^a Prova
Data: Quinta-feira, 14 de Novembro

2024
Turma M3

Exercício 1 O conjunto Ω pode ser descrito como

$$\Omega : \begin{cases} y^2 \leq z \leq 8 - 2x^2 - y^2 \\ (x, y) \in K \end{cases}$$

sendo K o conjunto do pontos (x, y) tais que

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} A &= \iiint_{\Omega} x \, dx \, dy \, dz \\ &= \iint_K \int_{y^2}^{8-2x^2-y^2} x \, dz \, dx \, dy \\ &= \iint_K xz \Big|_{y^2}^{8-2x^2-y^2} \, dx \, dy \\ &= \iint_K x (8 - 2x^2 - 2y^2) \, dx \, dy \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \quad |J| = r,$$

o conjunto K , neste referencial, torna-se

$$K_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} A &= \iint_{K_2} x (8 - 2x^2 - 2y^2) \, dx \, dy \\ &= \iint_{K_2} r \cos \theta (8 - 2r^2) |J| \, dr \, d\theta \\ &= \iint_{K_2} \cos \theta (8r^2 - 2r^4) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta (8r^2 - 2r^4) \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^2 \sin \theta (8r^2 - 2r^4) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \, dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^2 (8r^2 - 2r^4) \, dr \\ &= \frac{8}{3}r^3 - \frac{2}{5}r^5 \Big|_0^2 \\ &= \frac{128}{15} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 Observe que a equação do cone em questão é dada por

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{h^2} z^2$$

com $0 \leq z \leq h$. Logo, seu volume é dado por

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} 1 \, dx \, dy \, dz$$

onde

$$\Omega : \begin{cases} \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h \\ (x, y) \in K \end{cases}$$

$$6x + 6y + z = 6$$

sendo K o conjunto do pontos (x, y) tais que

$$x^2 + y^2 \leq R^2$$

Usando coordenadas cilíndricas, ou seja

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}, \quad |J| = r,$$

o conjunto Ω , neste referencial, torna-se,

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \frac{h}{R}r \leq z \leq h \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 V(\Omega) &= \iiint_{\Omega} 1 |J| dr d\theta dz \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{h}{R}r}^h r dz dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^R (rz) \Big|_{\frac{h}{R}r}^h dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(hr - \frac{h}{R}r^2 \right) dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{hr^2}{2} - \frac{hr^3}{3R} \right) \Big|_0^R d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{hR^2}{6} d\theta \\
 &= \frac{1}{3}\pi R^2 h
 \end{aligned}$$

Exercício 3 Perceba que o sólido Ω pode ser expresso da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + z^2 &\leq 2z \Rightarrow \\
 x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 1 &\leq 1 \Rightarrow \\
 x^2 + y^2 + (z - 1)^2 &\leq 1
 \end{aligned}$$

Ou seja, Ω é a esfera sólida de raio unitário e centro em $(0, 0, 1)$. Usando **coordenadas esféricas**,

$$\begin{cases} x = \rho \sen \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sen \varphi \sen \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} ,$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \rho^2 \sen \varphi,$$

o conjunto Ω , neste referencial torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \rho \leq 2 \cos \varphi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz \\
 &= \iiint_{\Omega_2} \rho |J| dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \varphi} \rho^3 \sen \varphi d\rho d\varphi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^4}{4} \sen \varphi \Big|_0^{2 \cos \varphi} d\varphi d\theta \\
 &= 4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sen \varphi \cos^4 \varphi d\varphi d\theta \\
 &= -\frac{4}{5} \int_0^{2\pi} \cos^5 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\
 &= \frac{4}{5} \int_0^{2\pi} d\theta \\
 &= \frac{8\pi}{5}
 \end{aligned}$$

Exercício 4 De acordo com o enunciado do problema, segue-se que a coordenada z do **centro de massa** do sólido Ω é dada por

$$z_c = \iiint_{\Omega} z \delta(x, y, z) dx dy dz$$

sendo

$$\delta(x, y) = 1$$

a densidade de Ω no ponto (x, y, z) e

$$\Omega : \begin{cases} \sqrt{6 - x^2 - y^2} \leq z \leq 4 - x^2 - y^2 \\ x^2 + y^2 \leq 2 \end{cases}$$

Usando **coordenadas cilíndricas**,

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sen \theta \\ z = z \end{cases} ,$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = r,$$

o conjunto Ω , neste referencial torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \sqrt{6 - r^2} \leq z \leq 4 - r^2 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 M(\Omega) &= \iiint_{\Omega} \delta(x, y, z) dx dy dz \\
 &= \iiint_{\Omega_2} |J| dr d\theta dz \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{\sqrt{6-r^2}}^{4-r^2} r dz dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} rz \Big|_{\sqrt{6-r^2}}^{4-r^2} dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (4r - r^3 - r\sqrt{6-r^2}) dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(2r^2 - \frac{1}{4}r^4 + \frac{1}{3}\sqrt{(6-r^2)^3} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} d\theta \\
 &= \left(\frac{17}{3} - 2\sqrt{6} \right) \int_0^{2\pi} d\theta \\
 &= 2\pi \left(\frac{17}{3} - 2\sqrt{6} \right) \\
 &= \frac{2\pi (17 - 6\sqrt{6})}{3}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 z_c &= \frac{1}{M(\Omega)} \iiint_{\Omega} z \delta(x, y, z) dx dy dz \\
 &= \frac{3}{2\pi (17 - 6\sqrt{6})} \iiint_{\Omega_2} z |J| dr d\theta dz \\
 &= \frac{3}{2\pi (17 - 6\sqrt{6})} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{\sqrt{6-r^2}}^{4-r^2} zr dz dr d\theta \\
 &= \frac{3}{4\pi (17 - 6\sqrt{6})} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} rz^2 \Big|_{\sqrt{6-r^2}}^{4-r^2} dr d\theta \\
 &= \frac{3}{4\pi (17 - 6\sqrt{6})} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (10r - 7r^3 + r^5) dr d\theta \\
 &= \frac{3}{4\pi (17 - 6\sqrt{6})} \int_0^{2\pi} \left(5r^2 - \frac{7}{4}r^4 + \frac{1}{6}r^6 \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{13}{4\pi (17 - 6\sqrt{6})} \int_0^{2\pi} d\theta \\
 &= \frac{13}{2 (17 - 6\sqrt{6})}
 \end{aligned}$$

■

Exercício 5 Para calcular o volume desejado, considere a seguinte **mudança de variáveis** que consiste numa deformação das coordenadas esféricas

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ \frac{y}{b} = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ \frac{z}{c} = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} x = a \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = b \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = c \rho \cos \varphi \end{cases}$$

cujos jacobiano é dado por

$$\begin{aligned}
 |J| &= \left\| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} \right\| \\
 &= a b c \rho^2 \operatorname{sen} \varphi
 \end{aligned}$$

Neste referencial, o **elipsóide** Ω , torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 V(\Omega) &= \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz \\
 &= \iiint_{\Omega_2} 1 |J| d\rho d\theta d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 a b c \rho^2 \operatorname{sen} \varphi d\rho d\varphi d\theta \\
 &= \frac{a b c}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho^3 \operatorname{sen} \varphi \Big|_0^1 d\varphi d\theta \\
 &= \frac{a b c}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \varphi d\varphi d\theta \\
 &= -\frac{a b c}{3} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \Big|_0^{\pi} d\theta
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2abc}{3} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\pi abc$$

