

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito 1^a Prova
 Data: Sexta-feira, 14 de Setembro de 2024

2024
 Turma M3

Exercício 1 O conjunto Ω pode ser descrito como

$$\Omega : \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq x^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} A &= \iint_{\Omega} \frac{2y}{\sqrt{x^4 + 1}} dx dy \\ &= \int_1^2 \int_0^{x^{\frac{3}{2}}} \frac{2y}{\sqrt{x^4 + 1}} dy dx \\ &= \int_1^2 \frac{y^2}{\sqrt{x^4 + 1}} \Big|_0^{x^{\frac{3}{2}}} dx \\ &= \int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}} dx \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{x^4 + 1} \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{17} - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Exercício 2 Explorando a simetria da pirâmide em relação ao eixo z , podemos afirmar que o seu volume é dado por 4 vezes o volume da região da mesma que encontra-se no primeiro octante. Para seu cálculo, peceba que a face que encontra-se no primeiro octante corresponde ao plano que passa pelos pontos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 6)$, ou seja

$$6x + 6y + z = 6$$

e está sobre o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} V &= 4 \iint_{\Omega} (6 - 6x - 6y) dx dy \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^{1-x} (6 - 6x - 6y) dy dx \\ &= 4 \int_0^1 (6y - 6xy - 3y^2) \Big|_0^{1-x} dx \\ &= 12 \int_0^1 (1 - 2x + x^2) dx \\ &= 12 \left(x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Exercício 3 Deseja-se calcular a integral

$$\iint_{\Omega} \frac{2y}{4 + \sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$$

sendo Ω o conjunto $x^2 + y^2 \leq 4$, com $x \leq 0$ Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \quad |J| = r,$$

observe que o conjunto Ω , neste referencial, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{2y}{4 + \sqrt{x^2 + y^2}} dx dy &= \iint_{\Omega_2} \frac{2r \operatorname{sen} \theta}{4 + r} |J| dr d\theta \\ &= \int_0^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{2r^2 \operatorname{sen} \theta}{4 + r} d\theta dr \\ &= \int_0^2 \left. \frac{-2r^2 \cos \theta}{4 + r} \right|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} dr \\ &= \int_0^2 \frac{-2r^2}{4 + r} (0 - 0) dr \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exercício 4 Para resolver a integral dada, considere a seguinte *mudança de variáveis*

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = x + 2y \\ v = x \end{cases}$$

ou seja,

$$\varphi : \begin{cases} x = v \\ y = \frac{u - v}{2} \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$\begin{aligned} |J| &= \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \\ &= \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right\| \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Neste referencial, o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq u \leq 2 - v \\ 0 \leq v \leq 2 \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} x^2 \sqrt{x + 2y} dx dy &= \iint_{\Omega_2} v^2 \sqrt{u} |J| du dv \\ &= \int_0^2 \int_0^{2-v} \frac{1}{2} v^2 \sqrt{u} du dv \\ &= \frac{1}{3} \int_0^2 v^2 u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{2-v} dv \\ &= \frac{1}{3} \int_0^2 v^2 (2 - v)^{\frac{3}{2}} dv \\ &= -\frac{1}{3} \int_2^0 (2 - w)^2 w^{\frac{3}{2}} dw \\ &= -\frac{1}{3} \left(\frac{8}{5} w^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{7} w^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{9} w^{\frac{9}{2}} \right) \Big|_2^0 \\ &= \frac{256}{945} \sqrt{2} \end{aligned}$$

Exercício 5 De acordo com o enunciado do problema, segue-se que a *massa* que se deseja calcular é dada por

$$M(\Omega) = \iint_{\Omega} \delta(x, y) dx dy$$

sendo

$$\delta(x, y) = k, k \in \mathbb{R}$$

a densidade da chapa no ponto (x, y) e

$$\Omega : \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{3}} - 1 \leq x \leq 1 - \frac{y}{\sqrt{3}} \\ 0 \leq y \leq \sqrt{3} \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} M(\Omega) &= \int_0^{\sqrt{3}} \int_{\frac{y}{\sqrt{3}} - 1}^{1 - \frac{y}{\sqrt{3}}} k dx dy \\ &= k \int_0^{\sqrt{3}} x \Big|_{\frac{y}{\sqrt{3}} - 1}^{1 - \frac{y}{\sqrt{3}}} dy \\ &= 2k \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{y}{\sqrt{3}} \right) dy \\ &= 2k \left(y - \frac{y^2}{2\sqrt{3}} \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} \\ &= k\sqrt{3} \end{aligned}$$