Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito Prova Final **2023**
Data: Terça-feira, 19 de Dezembro **Turma P3**

Exercício 1 *Deseja-se calcular a integral*

$$\iint_{\Omega} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}\,dx\,dy$$

sendo Ω *o conjunto* $x^2+y^2 \leq 5$, *com* $x \geq 0$ *Usando **coordenadas polares**, ou seja*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases},\quad |J| = r,$$

observe que o conjunto Ω*, neste referencial, torna-se*

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{5} \\ -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}\,dx\,dy &= \iint_{\Omega_2} e^{-\frac{r^2}{2}}\,|J|\,dr\,d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{5}} re^{-\frac{r^2}{2}}\,dr\,d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -e^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_0^{\sqrt{5}}\,d\theta \\ &= \left(1-\frac{1}{\sqrt{e^5}}\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \left(1-\frac{1}{\sqrt{e^5}}\right)\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(1-\frac{1}{\sqrt{e^5}}\right)\pi \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Para resolver a integral dada, considere a seguinte **mudança de variáveis***

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = 3x+2y \\ v = 2y-x \end{cases}$$

ou seja,

$$\varphi : \begin{cases} x = \dfrac{u-v}{4} \\ y = \dfrac{u+3v}{6} \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$\begin{aligned} |J| &= \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \\ &= \left\| \begin{matrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\| \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Neste referencial, o conjunto Ω *torna-se*

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq u \leq 16 \\ 0 \leq v \leq 8 \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (3x+2y)^2\,\sqrt{2y-x}dx\,dy &= \iint_{\Omega_2} u^2\sqrt{v}\,|J|\,du\,dv \\ &= \int_0^{16}\int_0^8 \frac{1}{6}u^2\sqrt{v}dv\,du \\ &= \frac{1}{6}\int_0^{16} \frac{2}{3}u^2\sqrt{v^3}\Big|_0^8 du \\ &= \frac{16\sqrt{2}}{9}\int_0^{16} u^2du \\ &= \frac{16\sqrt{2}}{9}\,\frac{1}{3}u^3\Big|_0^{16} \\ &= \frac{16^4\sqrt{2}}{27} \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *O **volume** da região em questão é dado por*

$$V = \iiint_{\Omega} 1\,dx\,dy\,dz$$

*De acordo com o **Teorema de Fubini**, segue-se que*

$$V = \iint_K \int_0^{6-x-y} dz\,dx\,dy$$

sendo
$$K : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$$
Usando ***coordenadas cilíndricas****, ou seja*

$$\begin{cases} x = r\,\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

cujo jacobiano é
$$|J| = r,$$
neste referencial, o conjunto Ω *torna-se*

$$\Omega_2 : \begin{cases} 1 \leq r \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 4 - r\,\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

e, disto segue-se que

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega_2} |J|\; dr\, d\theta\, dz \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{6-r\,\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta} r\, dz\, d\theta\, dr \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} rz \Big|_0^{6-r\,\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta} \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} r\,(6 - r\,\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta)\, d\theta\, dr \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} (6\theta - r\,\text{sen}\,\theta + r\cos\theta)\, r \Big|_0^{2\pi} dr \\ &= 12\pi \int_1^{\sqrt{2}} r dr \\ &= 6\pi r^2 \Big|_1^{\sqrt{2}} \\ &= 6\pi \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Observe que a curva* γ *é um círculo de raio unitário e centro no ponto* $(0, -1)$*, ou seja, uma curva fechada. Usando o* ***Teorema de Green****, tem-se que*

$$\begin{aligned} I &= \int_\gamma y\,\text{tg}^2 x\, dx + \text{tg}\, x\, dy \\ &= \iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x} (\text{tg}\, x) - \frac{\partial}{\partial y} \left(y\,\text{tg}^2 x \right) \right] dx\, dy \\ &= \iint_\Omega \left(\sec^2 x - \text{tg}^2 x \right) dx\, dy \\ &= \iint_\Omega \left(1 + \text{tg}^2 x - \text{tg}^2 x \right) dx\, dy \\ &= \iint_\Omega dx\, dy \\ &= \textit{Área}\, (\Omega) \end{aligned}$$

sendo Ω *o interior da curva* γ*, ou seja, um círculo de raio unitário. Assim,*

$$\begin{aligned} I &= \int_\gamma y\,\text{tg}^2 x\, dx + \text{tg}\, x\, dy \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Como a curva em questão é fechada, o* ***Teorema da Divergência de Gauss****, permite afirmar que tal fluxo é dado por*

$$\begin{aligned} \int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\gamma &= \iint_\Omega \text{div}\, \mathbf{F}\, dx\, dy \\ &= \iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x} (xy) + \frac{\partial}{\partial y} (x - y) \right] dx\, dy \\ &= \iint_\Omega (y - 1)\, dx\, dy \end{aligned}$$

sendo Ω *o interior da curva dada, ou seja, o quadrado* $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$*. Logo*

$$\begin{aligned} \int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\gamma &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (y - 1)\, dx\, dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

■