

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito 3^a Prova
Data: Terça-feira, 19 de Dezembro

2023
Turma P3

Exercício 1 Observe que γ é uma curva fechada, porém orientada no sentido horário. Considerando $-\gamma$ como a curva com o mesmo traçado de γ e orientação no sentido antihorário, segue-se do **Teorema de Green**, que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} y \, dx - x \, dy &= - \int_{-\gamma} y \, dx - x \, dy \\ &= - \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} (-x) - \frac{\partial}{\partial y} (y) \right] dx \, dy \\ &= - \iint_{\Omega} -2 \, dx \, dy \\ &= 2 \iint_{\Omega} dx \, dy \\ &= 2 \text{Área}(\Omega) \end{aligned}$$

sendo Ω o interior da curva γ , ou seja, a área do triângulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$ e $(1,1)$. Portanto

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} y \, dx - x \, dy &= 2 \cdot \frac{2 \cdot 1}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Exercício 2 De acordo com os dados informados na questão, a **densidade** do arame é dada por

$$\delta(x, y) = k \sqrt{x^2 + y^2}, \quad k \in \mathbb{R}$$

e seu formato obedece à curva

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

Portanto, a **massa** que deseja-se calcular é dada por

$$\begin{aligned} M &= \int_{\gamma} \delta(x, y) \, d\gamma \\ &= \int_0^1 \delta(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \delta(\gamma(t)) &= \delta(e^t \cos t, e^t \sin t) \\ &= k \sqrt{(e^t \cos t)^2 + (e^t \sin t)^2} \\ &= k \sqrt{e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \sin^2 t} \\ &= k \sqrt{e^{2t}} \\ &= k e^t \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \left((e^t \cos t)', (e^t \sin t)' \right) \\ &= (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t) \\ &= e^t (\cos t - \sin t, \sin t + \cos t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{e^{2t} (\cos t - \sin t)^2 + e^{2t} (\sin t + \cos t)^2} \\ &= e^t \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2} \\ &= \sqrt{2} e^t \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 k e^t \sqrt{2} e^t \, dt \\ &= k \sqrt{2} \int_0^1 e^{2t} \, dt \\ &= k \sqrt{2} \left. \frac{e^{2t}}{2} \right|_0^1 \\ &= \frac{k \sqrt{2}}{2} (e^2 - 1) \end{aligned}$$

Exercício 3 O trabalho realizado pelo **campo de forças**

$$F(x, y) = xy \mathbf{i} + (x - y) \mathbf{j}$$

ao mover uma partícula do ponto $(0,0)$ ao ponto $(1,0)$ ao longo da curva

$$\gamma(t) = (t, \lambda t(1-t))$$

é dado por

$$\begin{aligned}\tau &= \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma \\ &= \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\gamma(t)) &= \mathbf{F}(t, \lambda t(1-t)) \\ &= (\lambda t^2(1-t), t(1-\lambda + \lambda t))\end{aligned}$$

$$\gamma'(t) = (1, \lambda(1-2t))$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= (\lambda t^2(1-t), t(1-\lambda + \lambda t)) \cdot (1, \lambda(1-2t)) \\ &= \lambda t^2(1-t) + \lambda t(1-\lambda + \lambda t)(1-2t) \\ &= ((-2\lambda - 1)t^3 + (3\lambda - 1)t^2 + (-\lambda + 1)t)\lambda\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\tau &= \int_0^1 ((-2\lambda - 1)t^3 + (3\lambda - 1)t^2 + (-\lambda + 1)t)\lambda dt \\ &= \lambda \left[(-2\lambda - 1) \frac{t^4}{4} + (3\lambda - 1) \frac{t^3}{3} + (-\lambda + 1) \frac{t^2}{2} \right] \Big|_0^1 \\ &= \lambda \left(\frac{1}{4}(-2\lambda - 1) + \frac{1}{3}(3\lambda - 1) + \frac{1}{2}(-\lambda + 1) \right) \\ &= -\frac{\lambda}{12}\end{aligned}$$

e, tal trabalho será 1, quando

$$-\frac{\lambda}{12} = 1 \Rightarrow \lambda = -12$$

Exercício 4 Observe que a curva γ é um círculo de raio unitário e centro no ponto $(0, -1)$, ou seja, uma curva

fechada. Usando o **Teorema de Green**, tem-se que

$$\begin{aligned}I &= \int_{\gamma} y \operatorname{tg}^2 x dx + \operatorname{tg} x dy \\ &= \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{tg} x) - \frac{\partial}{\partial y} (y \operatorname{tg}^2 x) \right] dx dy \\ &= \iint_{\Omega} (\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x) dx dy \\ &= \iint_{\Omega} (1 + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x) dx dy \\ &= \iint_{\Omega} dx dy \\ &= \text{Área}(\Omega)\end{aligned}$$

sendo Ω o interior da curva γ , ou seja, um círculo de raio unitário. Assim,

$$\begin{aligned}I &= \int_{\gamma} y \operatorname{tg}^2 x dx + \operatorname{tg} x dy \\ &= 2\pi\end{aligned}$$

Exercício 5 Como a curva em questão é fechada, o **Teorema da Divergência de Gauss**, permite afirmar que tal fluxo é dado por

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\gamma &= \iint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy \\ &= \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} (xy) + \frac{\partial}{\partial y} (x - y) \right] dx dy \\ &= \iint_{\Omega} (y - 1) dx dy\end{aligned}$$

sendo Ω o interior da curva dada, ou seja, o quadrado $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$. Logo

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\gamma &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (y - 1) dx dy \\ &= 0\end{aligned}$$