Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 2ª Prova **2023**
Data: Segunda-feira, 04 de Dezembro **Turma P3**

Exercício 1 *Deseja-se calcular a integral*

$$A = \iiint_{\Omega} xyze^{-x^2-y^2}\, dx\, dy\, dz$$

sendo Ω o conjunto de pontos em $\mathbb{R}^3$ tais que

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{\ln 2} \\ 0 \leq y \leq \sqrt{\ln 4} \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

*Como todas as variáveis possuem limites fixos, o **Teorema de Fubini** permite que a ordem de integração possa ser qualquer. Sendo assim,*

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{\ln 4}} \int_0^{\sqrt{\ln 2}} xyze^{-x^2-y^2}\, dx\, dy\, dz \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{\sqrt{\ln 4}} z\, ye^{-y^2} e^{-x^2} \Big|_0^{\sqrt{\ln 2}} dy\, dz \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 \int_0^{\sqrt{\ln 4}} z\, ye^{-y^2} dy\, dz \\ &= -\frac{1}{8}\int_0^1 ze^{-y^2} \Big|_0^{\sqrt{\ln 4}} dz \\ &= \frac{3}{32}\int_0^1 z\, dz \\ &= \frac{3}{64} z^2 \Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{64} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *O **volume** da região em questão é dado por*

$$V = \iiint_{\Omega} 1\, dx\, dy\, dz$$

*De acordo com o **Teorema de Fubini**, segue-se que*

$$V = \iint_K \int_0^{4-x-y} dz\, dx\, dy$$

sendo

$$K : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$$

*Usando **coordenadas cilíndricas**, ou seja*

$$\begin{cases} x = r\, \cos\theta \\ y = r\, \text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r,$$

neste referencial, o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 1 \leq r \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 4 - r\, \cos\theta - r\, \text{sen}\,\theta \end{cases}$$

e, disto segue-se que

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega_2} |J|\, dr\, d\theta\, dz \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{4-r\,\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta} r\, dz\, d\theta\, dr \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} rz \Big|_0^{4-r\,\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta} \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} r\,(4 - r\,\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta)\, d\theta\, dr \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} (4\theta - r\,\text{sen}\,\theta + r\cos\theta)\, r \Big|_0^{2\pi} dr \\ &= 8\pi \int_1^{\sqrt{2}} r dr \\ &= 4\pi r^2 \Big|_1^{\sqrt{2}} \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *O volume do sólido em questão é dado por*

$$V = \iiint_{\Omega} dx\, dy\, dz$$

sendo Ω a região descrita no problema.Observe que, usando ***coordenadas esféricas****,*

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \quad , \quad |J| = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi, \\ z = \rho \ \cos \varphi \end{cases}$$

o conjunto Ω, neste referencial, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{4} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \sec \varphi \leq \rho \leq 2 \sec \varphi \end{cases}$$

Disto segue-se que,

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega_2} |J|\, d\rho\, d\theta\, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sec \varphi}^{2 \sec \varphi} \rho^2 \operatorname{sen} \varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho^3}{3} \operatorname{sen} \varphi \Big|_{\sec \varphi}^{2 \sec \varphi} d\varphi\, d\theta \\ &= \frac{7}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} \varphi \sec^3 \varphi\, d\varphi\, d\theta \\ &= \frac{7}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos^3 \varphi}\, d\varphi\, d\theta \\ &= \frac{7}{6} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= \frac{7}{6} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{7}{3} \pi \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *A* ***massa*** *que se deseja calcular é dada por*

$$M(\Omega) = \iiint_{\Omega} \delta(x, y, z) dx\, dy\, dz$$

sendo Ω a esfera de raio 4 centrada na origem, ou seja, o conjunto de pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$$

e $\delta(x, y, z)$ a densidade de esfera no ponto (x, y, z) que, de acordo com o enunciado do problema, é

$$\delta(x, y, z) = 1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Usando ***coordenadas esféricas****,*

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \quad , \quad |J| = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi, \\ z = \rho \ \cos \varphi \end{cases}$$

o conjunto Ω, neste referencial, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \rho \leq 4 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Disto segue-se que,

$$\begin{aligned} M(\Omega) &= \iiint_{\Omega_2} (1 + \rho)\, |J|\, d\rho\, d\varphi\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^4 \int_0^{\pi} (1 + \rho)\, \rho^2 \operatorname{sen} \varphi\, d\varphi\, d\rho\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^4 -(1 + \rho)\, \rho^2 \cos \varphi \Big|_0^{\pi} d\rho\, d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^4 (1 + \rho)\, \rho^2 d\rho\, d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^3}{3} + \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^4 d\theta \\ &= \frac{512}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{1024}{3} \pi \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Inicilmente observe que a região dada no problema pode ser expressa da seguinte maneira*

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq y - 2x \leq 1 \\ 0 \leq z - 3y \leq 1 \\ 0 \leq z - 4x \leq 3 \end{cases}$$

Para resolver a integral dada, considere a ***mudança de variáveis*** *dada por*

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = y - 2x \\ v = z - 3y \\ w = z - 4x \end{cases}$$

ou seja,

$$\varphi : \begin{cases} x = \dfrac{w - v - 3u}{2} \\ y = w - v - 2u \\ z = 3w - 2v - 6u \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right|$$

$$= \left\| \begin{matrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 & 1 \\ -6 & -2 & 3 \end{matrix} \right\|$$

$$= \frac{1}{2}$$

Neste referencial, o conjunto Ω *torna-se*

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 \\ 0 \leq w \leq 3 \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega dx\, dy\, dz &= \iiint_{\Omega_2} |J|\, du\, dv\, dw \\ &= \int_0^3 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} du\, dv\, dw \\ &= \int_0^3 \int_0^1 \frac{1}{2} u\,{}_0^1 dv\, dw \\ &= \frac{1}{2} \int_0^3 v\,{}_0^1 dw \\ &= \frac{1}{2}\, w \Big|_0^3 \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

■