Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 1ª Prova **2023**
Data: Quarte-feira, 11 de Outubro de 2023 **Turma P3**

Exercício 1 *Deseja-se resolver a seguinte integral iterada*

$$A = \int_0^2 \int_{y^2}^4 \sqrt{x}\operatorname{sen} x \, dx \, dy$$

Observe que o domínio de integração é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} y^2 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases},$$

que pode também ser expresso por

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{x} \end{cases}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} A &= \iint_\Omega \sqrt{x}\operatorname{sen} x \, dx \, dy \\ &= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{x}\operatorname{sen} x \, dy \, dx \\ &= \int_0^4 \sqrt{x}\operatorname{sen} x \, y \Big|_0^{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^4 x \operatorname{sen} x \, dx \\ &= (-x\cos x + \operatorname{sen} x) \Big|_0^4 \\ &= \operatorname{sen} 4 - 4\cos 4 \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *O volume do sólido em questão é dado por*

$$V = \iint_\Omega (x + y)\, dx\, dy$$

sendo

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \end{cases}$$

Usando ***coordenadas polares****, ou seja*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}, \quad |J| = r,$$

o conjunto Ω, neste referencial, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Disto segue-se que,

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\Omega_2} (r\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta)\ |J|\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^2 (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3} (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) \Big|_0^2 d\theta \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\, d\theta \\ &= \frac{8}{3} (\operatorname{sen}\theta - \cos\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Deseja-se calcular a integral*

$$\iint_\Omega e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}\, dx\, dy$$

sendo Ω o conjunto $x^2 + y^2 \leq 5$, com $x \geq 0$ Usando ***coordenadas polares****, ou seja*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}, \quad |J| = r,$$

observe que o conjunto Ω, neste referencial, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{5} \\ -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\iint_{\Omega} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}\,dx\,dy &= \iint_{\Omega_2} e^{-\frac{r^2}{2}}\,|J|\,dr\,d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{5}} re^{-\frac{r^2}{2}}\,dr\,d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -e^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_0^{\sqrt{5}}\,d\theta \\
&= \left(1-\frac{1}{\sqrt{e^5}}\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\
&= \left(1-\frac{1}{\sqrt{e^5}}\right)\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left(1-\frac{1}{\sqrt{e^5}}\right)\pi
\end{aligned}
$$

■

Exercício 4 *Para resolver a integral dada, considere a seguinte* ***mudança de variáveis***

$$
\varphi^{-1}:\begin{cases} u = 3x+2y \\ v = 2y-x \end{cases}
$$

ou seja,

$$
\varphi:\begin{cases} x = \dfrac{u-v}{4} \\ y = \dfrac{u+3v}{6} \end{cases}
$$

cujo jacobiano é

$$
\begin{aligned}
|J| &= \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \\
&= \left\| \begin{matrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\| \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Neste referencial, o conjunto Ω torna-se

$$
\Omega_2:\begin{cases} 0 \le u \le 16 \\ 0 \le v \le 8 \end{cases}
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
\iint_{\Omega} (3x+2y)^2\sqrt{2y-x}\,dx\,dy &= \iint_{\Omega_2} u^2\sqrt{v}\,|J|\,du\,dv \\
&= \int_0^{16}\int_0^8 \frac{1}{6}u^2\sqrt{v}\,dv\,du \\
&= \frac{1}{6}\int_0^{16} \frac{2}{3}u^2\sqrt{v^3}\Big|_0^8\,du \\
&= \frac{16\sqrt{2}}{9}\int_0^{16} u^2\,du \\
&= \frac{16\sqrt{2}}{9}\,\frac{1}{3}u^3\Big|_0^{16} \\
&= \frac{16^4\sqrt{2}}{27}
\end{aligned}
$$

■

Exercício 5 *De acordo com o enunciado do problema, segue-se que a* ***massa*** *que se deseja calcular é dada por*

$$
M(\Omega) = \iint_{\Omega} \delta(x,y)\,dx\,dy
$$

sendo

$$
\delta(x,y) = kx^2,\ k \in \mathbb{R}
$$

a densidade da chapa no ponto (x,y) e

$$
\Omega:\begin{cases} 1 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le \frac{4}{x} \end{cases}
$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
M(\Omega) &= \int_1^4\int_0^{\frac{4}{x}} kx^2\,dy\,dx \\
&= \int_1^4 \left(kx^2y\right)\Big|_0^{\frac{4}{x}}\,dx \\
&= 4k\int_1^4 x\,dx \\
&= 4k\left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^4 \\
&= 30k
\end{aligned}
$$

■