Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito Prova Final **2022**
Data: Terça-Feira, 15 de Agosto de 2023 **Turma A3**

Exercício 1 *Deseja-se resolver a seguinte integral iterada*

$$A = \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \int_y^{\sqrt[3]{\pi}} x^4 \cos\left(x^2 y\right) dx\, dy$$

Observe que o domínio de integração é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} y \leq x \leq \sqrt[3]{\pi} \\ 0 \leq y \leq \sqrt[3]{\pi} \end{cases},$$

que pode também ser expresso por

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt[3]{\pi} \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} A &= \iint_\Omega x^4 \cos\left(x^2 y\right) dx\, dy \\ &= \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \int_0^x x^4 \cos\left(x^2 y\right) dy\, dx \\ &= \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \text{sen}\left(x^2 y\right) \Big|_0^x dx \\ &= \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \text{sen}\left(x^3\right) dx \\ &= -\frac{1}{3} \cos\left(x^3\right) \Big|_0^{\sqrt[3]{\pi}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *O volume que deseja-se calcular é dado pela integral*

$$\iiint_\Omega dx\, dy\, dz$$

sendo Ω a região do espaço dado por

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \\ \frac{1}{2}(1 - x - y) \leq z \leq 1 - x - y \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega dx\, dy\, dz &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{\frac{1}{2}(1-x-y)}^{1-x-y} dz\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} z \Big|_{\frac{1}{2}(1-x-y)}^{1-x-y} dy\, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy\, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(y - xy - \frac{1}{2} y^2\right) \Big|_0^{1-x} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 (1-x)^2 dx \\ &= -\frac{1}{12} (1-x)^3 \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Usando **coordenadas cilíndricas**, ou seja*

$$\begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left\| \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (r, \theta, z)} \right\| = r,$$

o conjunto Ω neste referencial, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq r \end{cases}$$

Ou seja

$$\iiint_\Omega \left(x^2+y^2\right) dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega_2} r^2\,|J|\,dr\,d\theta\,dz$$
$$= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^r r^3 dz\,d\theta\,dr$$
$$= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} r^3 z\Big|_0^r d\theta\,dr$$
$$= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} r^4 d\theta\,dr$$
$$= \int_0^{\sqrt{2}} r^4\theta\Big|_0^{2\pi} dr$$
$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} r^4 dr$$
$$= 2\pi\,\frac{r^5}{5}\Big|_0^{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{8\sqrt{2}}{5}\pi$$

■

Exercício 4 *Uma parametrização possível para a superfície em questão é dada por*

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = 0 \quad ; \quad (u,v)\in\Omega \\ z = v \end{cases}$$

sendo Ω *o conjunto* $u^2+v^2\le 1$.*Disto segue-se, que*

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = (1,0,0)$$
$$\frac{\partial\sigma}{\partial v} = (0,0,1)$$
$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v} = (0,1,0)$$
$$\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\| = 1$$

e o fluxo de **F** *através de* σ *é, portanto*

$$\tau = \iint_\sigma \mathbf{F}\cdot n\,ds$$
$$= \iint_\Omega \mathbf{F}\left(\sigma(u,v)\right)\cdot\frac{\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}}{\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\|}\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\| du\,dv$$
$$= \iint_\Omega \mathbf{F}\left(u,0,v\right)\cdot\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right) du\,dv$$
$$= \iint_\Omega \left(u,v+4,v^2\right)\cdot(0,1,0)\,du\,dv$$
$$= \iint_\Omega (v+4)\,du\,dv$$

Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r,$$

o conjunto Ω *torna-se*

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0\le r\le 1 \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$$

Portanto,

$$\tau = \iint_\Omega (v+4)\,du\,dv$$
$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} (r\,\mathrm{sen}\,\theta\,+4)\,r\,d\theta\,dr$$
$$= \int_0^1 \left(-r^2\cos\,\theta\,+4r\theta\right)\Big|_0^{2\pi} dr$$

Portanto,

$$= \int_0^1 8\pi r\,dr$$
$$= 4\pi r^2\Big|_0^1$$
$$= 4\pi$$

■

Exercício 5 *De acordo com o* ***Teorema de Stokes****, tem-se que*

$$\iint_\sigma \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\cdot n\,ds = \int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\Gamma$$

onde Γ é a curva que corresponde à fronteira da superfície σ, ou seja

$$\Gamma : \begin{cases} x = 2\,\cos t \\ y = 2\,\mathrm{sen}\,t \quad , 0 \leq t \leq 2\pi \\ z = 4 \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \iint_\sigma \mathrm{rot}\,\mathbf{F} \cdot n\, ds &= \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\Gamma \\ &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}\left(\Gamma(t)\right) \cdot \Gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}\left(2\,\cos t, 2\,\mathrm{sen}\,t, 4\right) \cdot \left(-2\,\mathrm{sen}\,t, 2\,\cos t, 0\right)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-28\,\mathrm{sen}\,t + 20\cos^2 t\right) dt \\ &= \left(28\cos t + 10t + 5\mathrm{sen}\,2t\right)\Big|_0^{2\pi} \\ &= 20\pi \end{aligned}$$

■