

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**  
**Engenharia Civil**  
**Cálculo Diferencial e Integral III**

Prof<sup>o</sup>. Edson

2<sup>o</sup> Semestre

Gabarito 3<sup>a</sup> Prova  
 Data: Quarta-Feira, 09 de Agosto de 2023

2022  
 Turma A3

**Exercício 1** Inicialmente observe que o campo vetorial

$$f(x, y) = xy\vec{i} + (x^2 + x)\vec{j}$$

é contínua em todo o  $\mathbb{R}^2$  e como a curva em questão é fechada, o **Teorema de Green** garante que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} xydx + (x^2 + x)dy &= \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial(x^2 + x)}{\partial x} - \frac{\partial(xy)}{\partial y} \right] dx dy \\ &= \iint_{\Omega} (x + 1) dx dy \end{aligned}$$

Onde  $\Omega$  é o interior do triângulo de vértices  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ , ou seja,

$$\Omega_2 : \begin{cases} y - 1 \leq x \leq 1 - y \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} xydx + (x^2 + x)dy &= \int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} (x + 1) dx dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{y-1}^{1-y} dy \\ &= 2 \int_0^1 (1 - y) dy \\ &= 2 \left( y - \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_0^1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

■

**Exercício 2** Uma parametrização possível para a superfície em questão é dada por

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{u^2 + v^2} \end{cases} \quad (u, v) \in \Omega$$

sendo  $\Omega$  o conjunto  $u^2 + 2v^2 \leq 1$ , cuja fronteira corresponde à **interseção** entre o cone e o cilindro

dados. Disto segue-se, que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \left( 1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left( 0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left( \frac{-u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, 1 \right)$$

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| = \sqrt{2}$$

e a área que se deseja encontrar é, portanto

$$\begin{aligned} A &= \iint_{\sigma} ds \\ &= \iint_{\Omega} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du dv \\ &= \iint_{\Omega} \sqrt{2} du dv \\ &= \sqrt{2} \iint_{\Omega} du dv \\ &= \sqrt{2} \text{Área}(\Omega) \\ &= \sqrt{2} \frac{\pi}{\sqrt{2}} \\ &= \pi \end{aligned}$$

■

**Exercício 3** Uma parametrização possível para a superfície em questão é dada por

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = 0 \\ z = v \end{cases} ; (u, v) \in \Omega$$

sendo  $\Omega$  o conjunto  $u^2 + v^2 \leq 1$ . Disto segue-se, que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = (1, 0, 0)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = (0, 0, 1)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = (0, 1, 0)$$

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| = 1$$

e o fluxo de  $\mathbf{F}$  através de  $\sigma$  é, portanto

$$\begin{aligned} \tau &= \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds \\ &= \iint_{\Omega} \mathbf{F}(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\|} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| \, du \, dv \\ &= \iint_{\Omega} \mathbf{F}(u, 0, v) \cdot \left( \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right) \, du \, dv \\ &= \iint_{\Omega} (u, v + 4, v^2) \cdot (0, 1, 0) \, du \, dv \\ &= \iint_{\Omega} (v + 4) \, du \, dv \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} u = r \cos \theta \\ v = r \sin \theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r,$$

o conjunto  $\Omega$  torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \tau &= \iint_{\Omega} (v + 4) \, du \, dv \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r \sin \theta + 4) r \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^1 \left( -r^2 \cos \theta + 4r\theta \right) \Big|_0^{2\pi} \, dr \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 8\pi r \, dr \\ &= 4\pi r^2 \Big|_0^1 \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

■

**Exercício 4** Como o campo vetorial  $\mathbf{F}$  é contínuo em todo  $\mathbb{R}^3$  e a superfície em questão é fechada, o **Teorema da Divergência de Gauss**, afirma que

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz$$

sendo  $\Omega$  o interior do tetraedro dado, ou seja

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \\ 0 \leq z \leq 1 - x - y \end{cases}$$

. Disto segue-se que,

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \iiint_{\Omega} (2xz + x + xy) \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (2xz + x + xy) \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left( xz^2 + xz + xyz \right) \Big|_0^{1-x-y} \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left( 2x + x^2y - 2xy - 3x^2 + x^3 \right) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \left( 2xy + \frac{1}{2}x^2y^2 - xy^2 - 3x^2y + x^3y \right) \Big|_0^{1-x} \, dx \\ &= \int_0^1 \left( -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x \right) \, dx \\ &= \left( -\frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{15} \end{aligned}$$

■

**Exercício 5** De acordo com o **Teorema de Stokes**, tem-se que

$$\iint_{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\Gamma$$

onde  $\Gamma$  é a curva que corresponde à fronteira da superfície  $\sigma$ , ou seja

$$\Gamma : \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \operatorname{sen} t \\ z = 4 \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\Gamma \\ &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\Gamma(t)) \cdot \Gamma'(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(2 \cos t, 2 \operatorname{sen} t, 4) \cdot (-2 \operatorname{sen} t, 2 \cos t, 0) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-28 \operatorname{sen} t + 20 \cos^2 t) \, dt \\ &= (28 \cos t + 10t + 5 \operatorname{sen} 2t) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 20\pi \end{aligned}$$

■