Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

2^{o} Semestre

Gabarito 1ª Prova **2022**
Data: Sábado, 20 de Maio de 2023 **Turma A3**

Exercício 1 *Deseja-se calcular a integral*

$$\iint_\Omega (x+y)\; dx\, dy$$

sendo Ω a região do plano delimitada pelos gráficos de $y = |x|$ e $y = 4$. Inicialmente, observe que Ω pode ser expresso como

$$\Omega : \begin{cases} -y \leq x \leq y \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \iint_\Omega (x+y)\; dx\, dy &= \int_0^4 \int_{-y}^{y} (x+y) dx\, dy \\ &= \int_0^4 \left(\frac{x^2}{2} + yx\right)\Big|_{-y}^{y} dy \\ &= \int_0^4 2y^2 dy \\ &= \frac{2y^3}{3}\Big|_0^4 \\ &= \frac{128}{3} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Deseja-se resolver a seguinte integral iterada*

$$A = \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \int_y^{\sqrt[3]{\pi}} x^4 \cos\left(x^2 y\right) dx\, dy$$

Observe que o domínio de integração é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} y \leq x \leq \sqrt[3]{\pi} \\ 0 \leq y \leq \sqrt[3]{\pi} \end{cases},$$

que pode também ser expresso por

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt[3]{\pi} \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} A &= \iint_\Omega x^4 \cos\left(x^2 y\right) dx\, dy \\ &= \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \int_0^x x^4 \cos\left(x^2 y\right) dy\, dx \\ &= \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \mathrm{sen}\left(x^2 y\right) \Big|_0^x dx \\ &= \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \mathrm{sen}\left(x^3\right) dx \\ &= -\frac{1}{3}\cos\left(x^3\right) \Big|_0^{\sqrt[3]{\pi}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Para resolver integral dupla*

$$\iint_\Omega e^{-x^2-y^2} dx\, dy$$

sendo Ω a região do plano limitada pela circunferência de raio 3 centrada na origem, usaremos coordenadas polares. Em outras palavras considere

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}, \quad |J| = r$$

Neste referencial, o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Então,

$$\iint_{\Omega} e^{-x^2-y^2} dx\,dy = \iint_{\Omega_2} e^{-r^2}\,|J|\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 re^{-r^2}\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^3\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e^9}\right)d\theta$$
$$= \pi\left(1-e^{-9}\right)$$

■

Exercício 4 *O volume do sólido em questão é dado por*

$$V = \iint_{\Omega}\left[(5-y)-(1+x^2)\right]dxdy$$
$$= \iint_{\Omega}\left(4-y-x^2\right)dxdy$$

sendo

$$\Omega : \begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 4-x^2 \end{cases}$$

Disto segue-se que,

$$V = \int_{-2}^{2}\int_0^{4-x^2}\left(4-y-x^2\right)dy\,dx$$
$$= \int_{-2}^{2}\left(4y-\frac{1}{2}y^2-x^2y\right)\Big|_0^{4-x^2}dx$$
$$= \int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{2}x^4-4x^2+8\right)dx$$
$$= \left(\frac{1}{10}x^5-\frac{4}{3}x^3+8x\right)\Big|_{-2}^{2}$$
$$= \frac{256}{15}$$

■

Exercício 5 *De acordo com o enunciado do problema, segue-se que a* ***massa*** *que se deseja calcular é dada por*

$$M(\Omega) = \iint_{\Omega}\delta(x,y)dx\,dy$$

sendo

$$\delta(x,y) = x+y$$

a densidade da chapa no ponto (x,y) e

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ -y \le x \le y-y^2 \end{cases}$$

Ou seja,

$$M(\Omega) = \int_0^2\int_{-y}^{y-y^2}(x+y)\,dx\,dy$$
$$= \int_0^2\left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\Big|_{-y}^{y-y^2}dy$$
$$= \int_0^2\left(\frac{1}{2}y^4-2y^3+2y^2\right)dy$$
$$= \left(\frac{1}{10}y^5-\frac{1}{2}y^4+\frac{2}{3}y^3\right)\Big|_0^2$$
$$= \frac{8}{15}$$

■