Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabario Prova Final **2021**
Data: Terça-feira, 12 de Abril de 2022 **Turma P3**

Exercício 1 *O sólido em questão pode ser expresso como*

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x^2 \\ 0 \leq z \leq 1 - y - x^2 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \iiint_\Omega dx\, dy\, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-y-x^2} dz\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} \left(1 - y - x^2\right) dy\, dx \\ &= \int_0^1 \left(y - \frac{y^2}{2} - x^2 y\right) \Big|_0^{1-x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2}\right) dx \\ &= \left(\frac{1}{2}x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Considere a seguinte* ***mudança de variáveis***

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = x + 2y \\ v = x - z \\ w = 2y - z \end{cases}$$

Ou seja,

$$\varphi : \begin{cases} x = \dfrac{u + v - w}{2} \\ y = \dfrac{u - v + w}{4} \\ z = \dfrac{u - v - w}{2} \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \frac{1}{4}$$

e neste referencial o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq u \leq 2 \\ 0 \leq v \leq 2 \\ 0 \leq w \leq 4 \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_\Omega yz\, dx\, dy\, dz \\ &= \iiint_{\Omega_2} \left(\frac{u - v + w}{4}\right) \left(\frac{u - v - w}{2}\right) |J|\, du\, dv\, dw \\ &= \frac{1}{32} \int_0^2 \int_0^2 \int_0^4 (u - v + w)(u - v - w)\, dw\, dv\, du \\ &= -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *A massa do sólido em questão é dada por*

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 \delta dx\, dy\, dz &= \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 (x + y + z + 2)\, dx\, dy\, dz \\ &= \int_0^2 \int_0^2 (2y + 2z + 6)\, dy\, dz \\ &= \int_0^2 (4z + 16)\, dz \\ &= 40 \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Sendo a superfície em questão* ***fechada*** *e*

$$F(x, y, z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

segue-se, que

$$\operatorname{div} F = 1$$

e, pelo ***teorema da divergência de Gauss****, tem-se que*

$$\begin{aligned}\iint_\sigma F\cdot n\,ds &= \iiint_\Omega \operatorname{div} F\,dx\,dy\,dz\\ &= \iiint_\Omega dx\,dy\,dz\\ &= Vol(\Omega)\\ &= \frac{1}{3}\pi\cdot 9\cdot 3\\ &= 9\pi\end{aligned}$$

Uma vez que Ω é um cone circular reto de altura 3 e raio 3. ■

Exercício 5 *Uma parametrização possível para a superfície em questão, é dada por*

$$\sigma:\begin{cases} x = u \\ y = v & ;(u,v)\in\Omega \\ z = u^2+v^2 \end{cases}$$

sendo

$$\Omega = \left\{ (u,v)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, u^2+v^2\le 2\right\}$$

Donde segue-se que

$$\|\sigma_u\times\sigma_v\| = \sqrt{4u^2+4v^2+1}$$

Assim

$$\begin{aligned}\iint_\sigma \left(x^2+y^2\right) ds &= \iint_\Omega \left(u^2+v^2\right)\|\sigma_u\times\sigma_v\|\,du\,dv\\ &= \iint_\Omega \left(u^2+v^2\right)\sqrt{4(u^2+v^2)+1}du\,dv\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{4r^4+1}dr d\theta\\ &= \frac{\pi}{12}\left(17\sqrt{17}-1\right)\end{aligned}$$

■