Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof°. Edson

1° Semestre

Gabarito 3ª Prova **2021**
Data: Segunda-feira, 11 de Abril de 2022 **Turma P3**

Exercício 1 *Observe que*

$$\operatorname{Rot} F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^3\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3\right)$$
$$= 0$$

e

$$D_F = \mathbb{R}^2$$

Ou seja, F é um ***campo conservativo*** *e portanto, as integrais de linha sobre o campo F* ***não dependem do caminho*** *escolhido, dependem apenas dos pontos inicial e final da curva, que neste caso são*

$$\gamma(0) = (1,1)$$
$$\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (2,0)$$

Considere o caminho alternativo $\bar{\gamma} = \gamma_1 \cup \gamma_2$, cuja parametrização é dada por

$$-\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = t \end{cases}; \quad 0 \le t \le 1$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases}; \quad 1 \le t \le 2$$

Assim,

$$\int_\gamma x^3dx + y^3dy = \int_{\gamma_1} x^3dx + y^3dy + \int_{\gamma_2} x^3dx + y^3dy$$
$$= -\int_0^1 t^3dt + \int_1^2 t^3dt$$
$$= \int_0^2 \left(t, t^2\right) \cdot (1,0)\, dt$$
$$= \frac{7}{2}$$

■

Exercício 2 *Considere*

$$A = \int_\gamma \frac{dx}{1+y^2} + ydy$$

Usando o ***teorema de Green****, tem-se que*

$$A = \iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{1+y^2}\right)\right] dx\,dy$$

sendo

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$$

Ou seja

$$A = \iint_\Omega \frac{2y}{\left(1+y^2\right)^2} dx\,dy$$
$$= \int_0^1 \int_0^x \frac{2y}{\left(1+y^2\right)^2} dy\,dx$$
$$= 1 - \frac{\pi}{4}$$

■

Exercício 3 *Uma parametrização possível para a superfície em questão, é dada por*

$$\sigma : \begin{cases} x = 2\operatorname{sen} u \cos v \\ y = 2\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ z = 2\cos u \end{cases}; \quad \Omega : \begin{cases} 0 \le u \le \frac{\pi}{3} \\ 0 \le v \le 2\pi \end{cases}$$

Donde segue-se que

$$\|\sigma_u \times \sigma_v\| = 4\operatorname{sen} u$$

e

$$A(\sigma) = \iint_\sigma ds$$
$$= \iint_\Omega \|\sigma_u \times \sigma_v\|\, du\, dv$$
$$= \iint_\Omega 4\operatorname{sen} u\, du\, dv$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\operatorname{sen} u\, du\, dv$$
$$= 4\pi$$

■

Exercício 4 *Sendo a superfície em questão* ***fechada*** *e*

$$F(x,y,z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

segue-se, que

$$\operatorname{div} F = 1$$

e, pelo ***teorema da divergência de Gauss****, tem-se que*

$$\begin{aligned}\iint_\sigma F \cdot n\, ds &= \iiint_\Omega \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz \\ &= \iiint_\Omega dx\, dy\, dz \\ &= Vol(\Omega) \\ &= \frac{1}{3}\pi \cdot 16 \cdot 4 \\ &= \frac{64\pi}{3}\end{aligned}$$

Uma vez que Ω é um cone circular reto de altura 4 e raio 4. ■

Exercício 5 *Uma parametrização possível para a superfície em questão, é dada por*

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases} ; (u,v) \in \Omega$$

sendo

$$\Omega = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \middle| u^2 + v^2 \leq 1 \right\}$$

Donde segue-se que

$$\|\sigma_u \times \sigma_v\| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}$$

Assim

$$\begin{aligned}\iint_\sigma \left(x^2 + y^2\right) ds &= \iint_\Omega \left(u^2 + v^2\right) \|\sigma_u \times \sigma_v\|\, du\, dv \\ &= \iint_\Omega \left(u^2 + v^2\right) \sqrt{4(u^2 + v^2) + 1} du\, dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \sqrt{4r^4 + 1} dr d\theta \\ &= \frac{\pi}{12}\left(5\sqrt{5} - 1\right)\end{aligned}$$

■