Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 1ª Prova **2021**
Data: Quarta-feira, 16 de Março de 2022 **Turma P3**

Exercício 1 *Inicialmente, observe*

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^k (2x+y)dx\,dy &= \int_0^1 \left(x^2+xy\right)\Big|_0^k dy\\ &= \int_0^1 \left(k^2+ky\right)dy\\ &= k^2y+\frac{k}{2}y^2\Big|_0^1\\ &= k^2+\frac{k}{2}\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^k (2x+y)dx\,dy = 2 &\quad\Rightarrow\\ k^2+\frac{k}{2} = 2 &\quad\Rightarrow\\ 2k^2+k-4=0 &\quad\Rightarrow\\ k = \frac{-1\pm\sqrt{33}}{4}&\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Observe que o domínio de integração*

$$\Omega : \begin{cases} y\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases},$$

também pode ser expresso por

$$\Omega : \begin{cases} 0\le x\le 1\\ 0\le y\le x\end{cases}$$

Ou seja

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_y^1 x^2e^{xy}dx\,dy &= \iint_\Omega x^2e^{xy}dx\,dy\\ &= \int_0^1\int_0^x x^2e^{xy}dy\,dx\\ &= \int_0^1 x^2\frac{e^{xy}}{x}\Big|_0^x dx\\ &= \int_0^1\left(xe^{x^2}-x\right)dx\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{x^2}-x^2\right)\Big|_0^1\\ &= \frac{e}{2}-1\end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Sabendo que*

$$\Omega : \begin{cases} 0\le x\le 2\\ x\le y\le x+4\end{cases}$$

Segue-se que,

$$\begin{aligned}\iint_\Omega x^2y\,dxdy &= \int_0^2\int_x^{x+4} x^2y\,dy\,dx\\ &= \int_0^2 \frac{x^2y^2}{2}\Big|_x^{x+4} dx\\ &= \int_0^2\frac{8x^3+16x^2}{2}dx\\ &= \left(x^4+\frac{16}{6}x^3\right)\Big|_0^2\\ &= \frac{112}{3}\end{aligned}$$

■

Exercício 4 *O domínio de integração é o conjunto*

$$\Omega : \begin{cases} -1\le y\le 1\\ -\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2}\end{cases}$$

*em **coordenadas polares**, ou seja*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}, |J| = r$$

torna-se

$$\Omega_1 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

e disto segue-se que,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln\left(x^2+y^2+1\right) dx\, dy \\ &= \iint_{\Omega} \ln\left(x^2+y^2+1\right) dx\, dy \\ &= \iint_{\Omega_1} \ln\left(r^2+1\right) |J|\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi} r\ln\left(r^2+1\right) d\theta\, dr \\ &= \int_0^1 r\ln\left(r^2+1\right) \theta\Big|_0^{2\pi} dr \\ &= 2\pi\int_0^1 r\ln\left(r^2+1\right) dr \\ &= \pi\left(r^2+1\right)\left[\ln\left(r^2+1\right)-1\right]\Big|_0^1 \\ &= \pi\left(2\ln 2 - 1\right) \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *O sólido em questão pode ser expresso como*

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x^2 \\ 0 \leq z \leq 1 - y - x^2 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dx\, dy\, dz \\ &= \int_0^1\int_0^{1-x^2}\int_0^{1-y-x^2} dz\, dy\, dx \\ &= \int_0^1\int_0^{1-x^2} \left(1-y-x^2\right) dy\, dx \\ &= \int_0^1 \left(y - \frac{y^2}{2} - x^2 y\right)\Big|_0^{1-x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2}\right) dx \\ &= \left(\frac{1}{2}x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

■