Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

2^{o} Semestre

Gabario Prova Final **2020**

Data: Terça-feira, 09 de Novembro de 2021 **Turma E3**

Exercício 1 *Observe que o domínio de integração é o conjunto*

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ \sqrt{y} \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Este conjunto pode também, ser expresso como

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{x^3+1}dx\,dy &= \iint_\Omega \sqrt{x^3+1}dx\,dy \\ &= \int_0^2 \int_0^{x^2} \sqrt{x^3+1}dy\,dx \\ &= \frac{52}{9} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *O conjunto Ω pode ser descrito como*

$$\Omega : \begin{cases} y^2 \leq z \leq 8 - 2x^2 - y^2 \\ \underbrace{0 \leq 2x^2 + y^2 \leq 8}_{\Omega_2} \end{cases}$$

*Usando **coordenadas cilíndricas adptadas**, ou seja*

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases} ; \qquad \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

conjunto Ω, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{8} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ r^2\mathrm{sen}^2\theta \leq z \leq 8 - r^2 \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_\Omega xz\,dx\,dy\,dz \\ &= \int_0^{\sqrt{8}} \int_0^{2\pi} \int_{r^2\mathrm{sen}^2\theta}^{8-r^2} \frac{z}{\sqrt{2}} r\cos\theta \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| dz\,d\theta\,dr \\ &= \int_0^{\sqrt{8}} \int_0^{2\pi} \int_{r^2\mathrm{sen}^2\theta}^{8-r^2} \frac{z}{\sqrt{2}} r\cos\theta\, \frac{r}{\sqrt{2}} dz\,d\theta\,dr \\ &= \int_0^{\sqrt{8}} \int_0^{2\pi} \int_{r^2\mathrm{sen}^2\theta}^{8-r^2} \frac{z}{2} r^2\cos\theta\, dz\,d\theta\,dr \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Usando **coordenadas cilíndricas**, ou seja*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases} ; \qquad \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = r$$

conjunto Ω, neste referencial, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 4 \end{cases}$$

Além disso, é dado no enunciado do problema que

$$\delta(x,y,z) = e^{-z}$$

Assim,

$$\begin{aligned} M &= \iiint_\Omega \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\ &= \iiint_\Omega e^{-z} dx\,dy\,dz \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^4 e^{-z} r dz\,d\theta\,dr \\ &= 4\pi\left(1 - \frac{1}{e^4}\right) \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Considere a curva*

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

*que está no interior da curva γ que corresponde à fronteira do quadrado dado na questão e está orientada no sentido anti horário. Segue-se do **teorema de Green**, quee*

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F \cdot d\gamma &= \int_{\gamma_1} F \cdot d\gamma_1 \\
&= \int_0^{2\pi} F(\gamma_1(t)) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} F\left(\cos t, \operatorname{sen} t\right) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t, \cos t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} dt \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Uma parametrização possível para a superfície em questão, é dada por*

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{9 - u^2 - v^2} \end{cases} ; \quad \underbrace{1 \leq u^2 + v^2 \leq 2}_{\Omega}$$

Donde segue-se que

$$\|\sigma_u \times \sigma_v\| = \frac{3}{\sqrt{9 - u^2 - v^2}}$$

e

$$\begin{aligned}
\iint_\sigma z^{-1} ds &= \iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{9 - u^2 - v^2}} \|\sigma_u \times \sigma_v\|\, du\, dv \\
&= \iint_\Omega \frac{3}{9 - u^2 - v^2}\, du\, dv \\
&= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{3r}{9 - r^2}\, dr\, d\theta \\
&= 9\pi \ln 2 - 3\pi \ln 5
\end{aligned}$$

■