Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

2^{o} Semestre

Gabarito 3ª Prova **2020**
Data: Sexta-feira, 29 de Outubro de 2021 **Turma E3**

Exercício 1 *Observe que*

$$\operatorname{Rot} F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 y\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(xy^2\right)$$

$$= 2xy - 2xy$$

$$= 0$$

e

$$D_F = \mathbb{R}^2$$

Ou seja, F é um ***campo conservativo*** *e portanto, as integrais de linha sobre o campo F* ***não dependem do caminho*** *escolhido, dependem apenas dos pontos inicial e final da curva, que neste caso são*

$$\gamma(0) = (0,1)$$

$$\gamma(1) = (2,1)$$

Considere o caminho alternativo, cuja paramentrização é dada por

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 \end{cases}; \quad 0 \leq t \leq 2$$

Assim,

$$\int_\gamma F \cdot d\gamma = \int_{\gamma_1} F \cdot d\gamma_2$$

$$= \int_0^2 F\left(\gamma_1(t)\right) \cdot \gamma_1'(t) dt$$

$$= \int_0^2 \left(t, t^2\right) \cdot (1,0)\, dt$$

$$= \int_0^2 t\, dt$$

$$= 2$$

■

Exercício 2 *Considere*

$$A = \int_\gamma xe^{-2x} dx + \left(x^4 + x^2 y^2\right) dy$$

Usando o ***teorema de Green****, tem-se que*

$$A = \iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x^4 + x^2y^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(xe^{-2x}\right)\right] dx\, dy$$

sendo

$$\Omega : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

Ou seja

$$A = \iint_\Omega \left(4x^3 + 2xy^2\right) dx\, dy$$

Usando ***coordenadas polares****, ou seja*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases}; \quad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = r$$

o conjunto Ω, neste referencial torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Portanto,

$$A = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \left(4r^3\cos^3\theta + 2r^3\cos\theta\operatorname{sen}\theta\right) r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^2 \left(4r^4\cos^3\theta + 2r^4\cos\theta\operatorname{sen}\theta\right) dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{4}{5}r^5\cos^3\theta + \frac{2}{5}r^5\cos\theta\operatorname{sen}\theta\right)\Big|_1^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{124}{5}\cos^3\theta + \frac{62}{5}\cos\theta\operatorname{sen}\theta\right) d\theta$$

$$= 0$$

■

Exercício 3 *Uma parametrização possível para a superfície em questão, é dada por*

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}; \quad \underbrace{0 \leq u^2 + v^2 \leq 9}_{\Omega}$$

Donde segue-se que

$$\|\sigma_u \times \sigma_v\| = \sqrt{4\left(u^2+v^2\right)+1}$$

e

$$
\begin{aligned}
A(\sigma) &= \iint_\sigma ds \\
&= \iint_\Omega \|\sigma_u \times \sigma_v\|\, du\, dv \\
&= \iint_\Omega \sqrt{4\left(u^2+v^2\right)+1} du\, dv
\end{aligned}
$$

*Usando **coordenadas polares**, ou seja*

$$
\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r \operatorname{sen}\theta \end{cases}; \quad \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)}\right| = r
$$

o conjunto Ω, neste referencial torna-se

$$
\Omega_2 : \begin{cases} 0 \le r \le 3 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
A(\sigma) &= \int_0^{2\pi}\int_0^3 r\sqrt{4r^2+1} dr\, d\theta \\
&= \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37}-1\right)
\end{aligned}
$$

■

Exercício 4 *A superfície em questão pode ser expressa com*

$$
\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2
$$

com

$$
\sigma_1 : \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u \operatorname{sen} v \\ z = 1-u^2 \end{cases}; \quad \Omega_1 : \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 2\pi \end{cases}
$$

e

$$
\sigma_2 : \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u \operatorname{sen} v \\ z = 0 \end{cases}; \quad \Omega_2 : \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 2\pi \end{cases}
$$

Donde segue-se, que

$$
\sigma_{1u} \times \sigma_{1v} = \left(2u^2\cos v, 2u^2 \operatorname{sen} v, u\right)
$$

$$
\sigma_{2u} \times \sigma_{2v} = (0,0,u)
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\iint_\sigma F\cdot n\, ds &= \iint_{\sigma_1} F\cdot \mathbf{n}\, ds + \iint_{\sigma_2} F\cdot \mathbf{n}\, ds \\
&= \iint_{\Omega_1} \left(u^3\left(4 \operatorname{sen} v\cos v - 1\right)+u\right) du\, dv + \\
&+ \iint_{\Omega_2} 0\, du\, dv \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(u^3\left(4 \operatorname{sen} v\cos v - 1\right)+u\right) du\, dv \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

□

Outro modo: *Usando o **teorema da divergência de Gauss**, tem-se que*

$$
\iint_\sigma F\cdot n\, ds = \iiint_{\Omega_3} \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz
$$

onde Ω_3 é o interior da superfície σ ou seja

$$
\Omega_3 : \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ 0 \le z \le 1-x^2-y^2 \end{cases}
$$

*Usando **coordenadas cilíndricas**, ou seja*

$$
\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases}; \quad \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = r
$$

o conjunto Ω_3 neste referencial, torna-se

$$
\Omega_4 : \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le z \le 1-r^2 \end{cases}
$$

e disto segue-se que,

$$
\begin{aligned}
\iint_\sigma F\cdot n\, ds &= \iiint_{\Omega_3} \operatorname{div} F dx\, dy\, dz \\
&= \iiint_{\Omega_3} 1\, dx\, dy\, dz \\
&= \iiint_{\Omega_4} r\, dr\, d\theta\, dz \\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1-r^2} r dz\, d\theta\, dr \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

■

Exercício 5 *Uma parametrização possível para a superfície em questão, é dada por*

$$\sigma : \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u \operatorname{sen} v \\ z = u \end{cases}$$

com

$$\Omega : \begin{cases} 1 \leq u \leq 3 \\ 0 \leq v \leq 2\pi \end{cases}$$

Donde segue-se que

$$\|\sigma_u \times \sigma_v\| = \sqrt{2}u$$

e

$$\begin{aligned} \iint_\sigma x^2 z^2 ds &= \iint_\Omega u^2 \cos^2 v \, u^2 \, \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du \, dv \\ &= \iint_\Omega \sqrt{2} u^5 \cos^2 v \, du \, dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^3 \sqrt{2} u^5 \cos^2 v \, du \, dv \\ &= \frac{364}{3} \sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

■