

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito 2^a Prova
Data: Quarta-feira, 27 de Outubro de 2021

2020
Turma E3

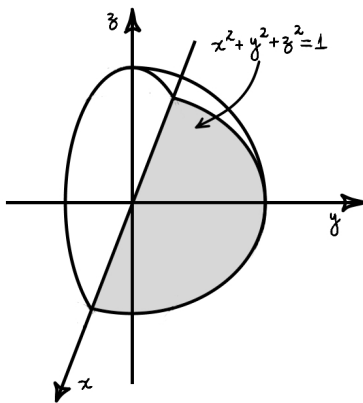
Exercício 1 Desejamos calcular a integral

$$A = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dz dy dx$$

Observe que, neste caso, o domínio de integração é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$$

cujo esboço é dado na figura abaixo



Assim, usando coordenadas esféricas,

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} \right| = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi$$

O conjunto Ω torna-se

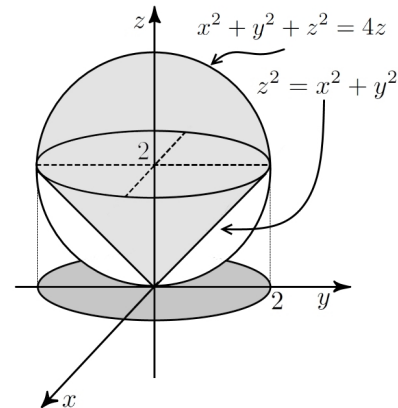
$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A &= \iiint_{\Omega_2} e^{-(\rho^2)^{\frac{3}{2}}} |J| d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} e^{-\rho^3} \rho^2 \operatorname{sen} \varphi d\theta d\varphi d\rho \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^3} \rho^2 \operatorname{sen} \varphi \Big|_0^{\pi} d\varphi d\rho \\ &= \pi \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^3} \rho^2 \operatorname{sen} \varphi d\varphi d\rho \\ &= -\pi \int_0^1 e^{-\rho^3} \rho^2 \cos \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\rho \\ &= \pi \int_0^1 e^{-\rho^3} \rho^2 d\rho \\ &= -\frac{\pi}{3} e^{-\rho^3} \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{e} \right) \end{aligned}$$

■

Exercício 2 Realizando um esboço do sólido em questão obtém-se a seguinte figura:



Ou seja, este sólido pode expresso da seguinte forma

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 + \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

Usando coordenadas cilíndricas,

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = r$$

o conjunto Ω neste referencial torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ r \leq z \leq 2 + \sqrt{4 - r^2} \end{cases}$$

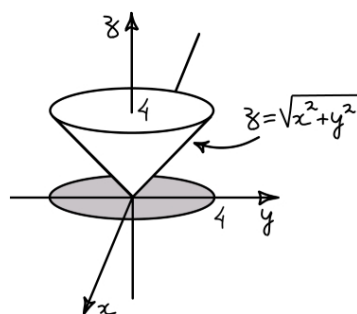
Portanto, o volume deste sólido é dado por

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_{\Omega_2} |J| \, dr \, d\theta \, dz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^{2+\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 rz \Big|_r^{2+\sqrt{4-r^2}} \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r (2 + \sqrt{4-r^2} - r) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (2r + r\sqrt{4-r^2} - r^2) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(r^2 - \frac{\sqrt{(4-r^2)^3}}{3} - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^2 \, d\theta \\ &= 4 \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 8\pi \end{aligned}$$

(Outro modo:) Observe que o sólido consiste da composição de uma meia esfera de raio 2 e um cone de base circular de raio 2 e altura 2. Ou seja, o volume deste sólido pode ser obtido da seguinte maneira

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \text{Vol(esfera)} + \text{Vol(cone)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3 + \frac{1}{3} \pi \cdot 2^2 \cdot 2 \\ &= \frac{24\pi}{3} \\ &= 8\pi \end{aligned}$$

Exercício 3 Um esboço possível para o sólido em questão é dado na figura abaixo



Usando coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \rho$$

o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 4 \\ r \leq z \leq 4 \end{cases}$$

A distância de um ponto qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ao eixo z , é dada por

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e, como a densidade neste mesmo ponto é proporcional à distância ao eixo z , segue-se que

$$\delta(x, y, z) = kd = k\sqrt{x^2 + y^2}$$

onde $k \in \mathbb{R}$. Assim, o momento de inércia procurado será

então

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_{\Omega} d^2 \delta dx dy dz \\
 &= \iiint_{\Omega} k (x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz \\
 &= k \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dx dy dz \\
 &= k \iiint_{\Omega_2} (\rho^2)^{\frac{3}{2}} |J| d\rho d\theta dz \\
 &= k \int_0^4 \int_0^{2\pi} \int_0^4 \rho^3 \rho dz d\theta d\rho \\
 &= k \int_0^4 \int_0^{2\pi} \rho^4 (4 - \rho) d\theta d\rho \\
 &= 2k\pi \int_0^4 (4\rho^4 - \rho^5) d\rho \\
 &= \frac{4096}{15} k\pi
 \end{aligned}$$

Exercício 4 Uma parametrização possível para a curva γ é dada por

$$\gamma : \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} &= - \int_{\gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \\
 &= - \int_0^{2\pi} \frac{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}{a^2} dt \\
 &= - \int_0^{2\pi} dt \\
 &= -2\pi
 \end{aligned}$$

Exercício 5 Sendo γ a metade direita do círculo

$$x^2 + y^2 = 16,$$

podemos parametrizar a curva γ da seguinte forma

$$\begin{cases} x(t) = 4 \cos t \\ y(t) = 4 \sin t \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

De onde segue-se que

$$\begin{aligned}
 ds &= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\
 &= \sqrt{16 \cos^2 t + 16 \sin^2 t} dt \\
 &= 4 dt
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} xy^4 ds &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos t (4 \sin t)^4 4 dt \\
 &= 4^6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^4 t dt
 \end{aligned}$$

Tome

$$u = \sin t$$

e observe que

$$\begin{aligned}
 du &= \cos t dt \\
 t = -\frac{\pi}{2} &\Rightarrow u = -1 \\
 t = \frac{\pi}{2} &\Rightarrow u = 1
 \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} xy^4 ds &= 4^6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^4 t dt \\
 &= 4^6 \int_{-1}^1 u^4 du \\
 &= \frac{4^6}{5} u^5 \Big|_{-1}^1 \\
 &= \frac{2 \cdot 4^6}{5}
 \end{aligned}$$