Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

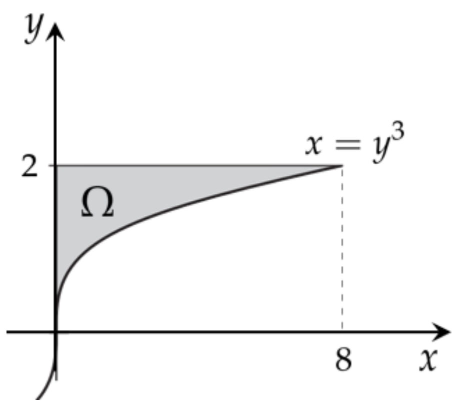
2$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 1ª Prova — **2020**
Data: Terça-feira, 07 de Setembro de 2021 — **Turma E3**

Exercício 1 *Inicialmente, observe que o domínio de integração pode ser expresso por*

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ \sqrt[3]{x} \leq y \leq 8 \end{cases},$$

Realizando um esboço desse conjunto obtém-se a seguinte figura



Ou seja, o conjunto Ω também pode ser expresso como

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq y^3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Logo,

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\,dx}{y^4+1} = \int_0^2 \int_0^{y^3} \frac{dx\,dy}{y^4+1}$$

$$= \int_0^2 \frac{x}{y^4+1}\bigg|_0^{y^3} dy$$

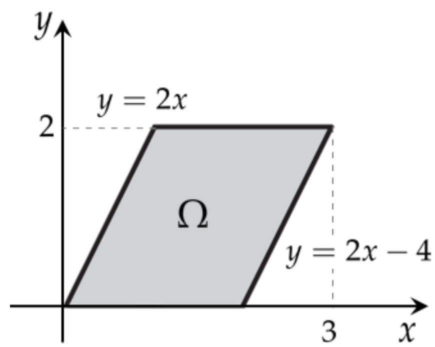
$$= \int_0^2 \frac{y^3}{y^4+1} dy$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left(y^4+1\right)\bigg|_0^2$$

$$= \frac{\ln 17}{4}$$

■

Exercício 2 *Realizando um esboço do domínio de integração, tem-se a seguinte figura*



Considere a seguinte mudança de variáveis

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = 2x - y \\ v = y \end{cases},$$

e observe que

$$\varphi : \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = v \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por,

$$|\mathrm{J}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

e, neste referencial o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq u \leq 4 \\ 0 \leq v \leq 2 \end{cases}$$

Donde segue-se que,

$$\iint_\Omega y^3\,(2x-y)\,e^{(2x-y)^2} dx\,dy = \iint_{\Omega_2} v^3 u e^{u^2}\,|J|\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \int_0^4 v^3 u e^{u^2} du\,dv$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 v^3 e^{u^2}\bigg|_0^4 dv$$

$$\iint_\Omega y^3\,(2x-y)\,e^{(2x-y)^2}dx\,dy = \frac{1}{4}\left(e^{16}-1\right)\int_0^2 v^3 dv$$
$$= \frac{1}{4}\left(e^{16}-1\right)\left.\frac{v^4}{4}\right|_0^2$$
$$= e^{16}-1$$

■

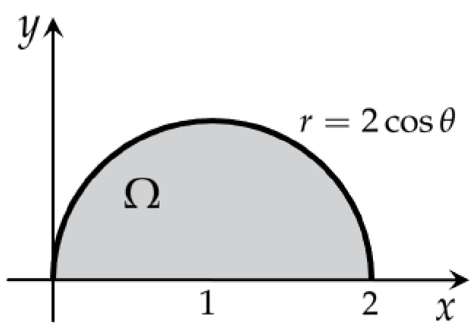
Exercício 3 *Deseja calcular*

$$A = \int_0^2\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}dy\,dx$$

O domínio de integração da integral em questão é dado por

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{1-(x-1)^2} \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

cujo esboço é dado pela seguinte figura



Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r,$$

o conjunto Ω *neste referencial torna-se*

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le r \le 2\cos\theta \end{cases},$$

Portanto,

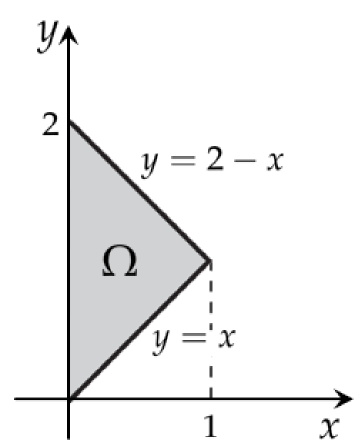
$$A = \iint_{\Omega_2} \frac{r\cos\theta + r\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^2}\,|J|\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^\pi\int_0^{2\cos\theta} \frac{r^2\,(\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta)}{r^2}dr\,d\theta$$
$$= \int_0^\pi\int_0^{2\cos\theta} (\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta)\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^\pi (\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta)\,r\Big|_0^{2\cos\theta} d\theta$$
$$= \int_0^\pi 2\cos\theta\,(\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta$$
$$= 2\int_0^\pi \left(\cos^2\theta + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\right)d\theta$$
$$= 2\int_0^\pi \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\right)d\theta$$
$$= 2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{4} - \frac{\cos^2\theta}{2}\right)\Big|_0^\pi$$
$$= \pi$$

■

Exercício 4 *O volume que se deseja encontrar é dado por*

$$V = \iint_\Omega \left(x^2+y^2\right)dx\,dy$$

Onde a região Ω *é esboçada na figura abaixo*



e pode ser expresso como

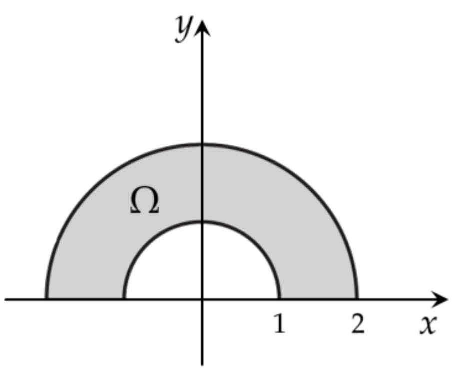
$$\Omega : \begin{cases} x \le y \le 2-x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases},$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \int_x^{2-x} \left(x^2+y^2\right) dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3\right) \Big|_x^{2-x} \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{8}{3}x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{8}{3}\right) dx \\
&= \left(-\frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{8}{3}x\right) \Big|_0^1 \\
&= -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} - 2 + \frac{8}{3} \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

■

Exercício 5 *Realizando um esboço da lâmina em questão obtêm-se a seguinte figura*



Usando coordenadas polares, ou seja

$$
\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,sen\,\theta \end{cases},
$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r$$

o conjunto Ω, neste referencial, torna-se

$$
\Omega_2 : \begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}
$$

E a massa desta lâmina, cuja densidade é dada por

$$\delta(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2},\ k \in \mathbb{R}$$

será, portanto

$$
\begin{aligned}
M(\Omega) &= \iint_\Omega \delta(x,y) dx\, dy \\
&= \iint_{\Omega_2} kr\, |J|\, dr\, d\theta \\
&= k\int_1^2 \int_0^\pi r^2 d\theta\, dr \\
&= \frac{7k\pi}{3}
\end{aligned}
$$

■