

Universidade Federal do Vale do São Francisco  
Engenharia Civil  
Cálculo Diferencial e Integral III

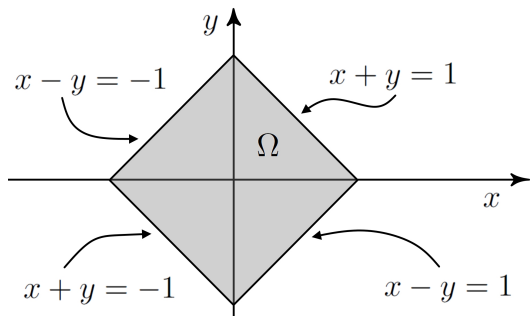
Prof. Edson

2º Semestre

Gabarito Prova Final  
Data: Sexta-feira, 29 de Março

2018  
Turma A3

**Exercício 1** Realizando um esboço do conjunto  $\Omega$  obtem-se



Considere a seguinte mudança de variável

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

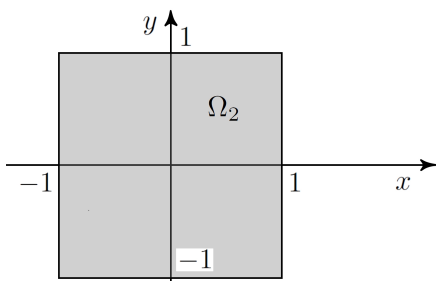
Segue-se desta escolha, que

$$\varphi : \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

cujos jacobiano é dado por

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{1}{2}$$

Neste referencial o conjunto  $\Omega$  torna-se



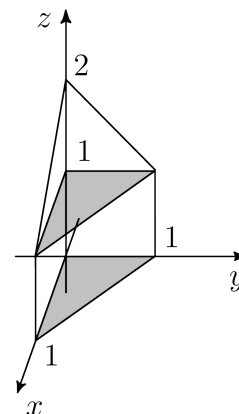
$$\Omega_2 : \begin{cases} -1 \leq u \leq 1 \\ -1 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} e^{x+y} dx dy &= \iint_{\Omega_2} e^u |J| du dv \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} e^u du dv \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} e^u \Big|_{-1}^1 dv \\ &= \frac{1}{2} (e - e^{-1}) \int_{-1}^1 dv \\ &= \frac{1}{2} (e - e^{-1}) v \Big|_{-1}^1 \\ &= e - e^{-1} \end{aligned}$$

■

**Exercício 2** Realizando um esboço do sólido em questão, obtemos a seguinte figura



Observando esta figura podemos deduzir que o sólido  $\Omega$  pode ser descrito por

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \\ 1 \leq z \leq 2 - x - y \end{cases}$$

Ou seja

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_{\Omega} 3z \, dx \, dy \, dz \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_1^{2-x-y} 3z \, dz \, dy \, dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{3}{2} z^2 \Big|_1^{2-x-y} \, dy \, dx \\
 &= \frac{3}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} [(2-x-y)^2 - 1] \, dy \, dx \\
 &= \frac{3}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2 + 2xy - 4x + y^2 - 4y + 3) \, dy \, dx \\
 &= \frac{3}{2} \int_0^1 \left( x^2 y + xy^2 - 4xy + \frac{y^3}{3} - 2y^2 + 3y \right) \Big|_0^{1-x} \, dx \\
 &= \frac{3}{2} \frac{1}{3} \int_0^1 (-x^3 + 6x^2 - 9x + 4) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \left( -\frac{x^4}{4} + 2x^3 - \frac{9x^2}{2} + 4x \right) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{5}{8}
 \end{aligned}$$

**Exercício 3** Uma parametrização possível para a superfície dada é

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v \end{cases}, (u, v) \in K$$

onde  $K$  é a região delimitada pelo triângulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 2)$ , ou seja

$$K : \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq -2u + 2 \end{cases}$$

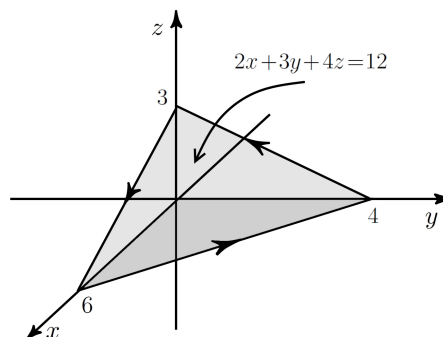
Segue-se portanto, que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) &= (1, 0, 2u) \\
 \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) &= (0, 1, 1) \\
 \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) &= (-2u, -1, 1) \\
 \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\| &= \sqrt{4u^2 + 2}
 \end{aligned}$$

donde, temos que, a área procurada é dada por

$$\begin{aligned}
 A &= \iint_{\sigma} ds \\
 &= \iint_K \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\| \, du \, dv \\
 &= \iint_K \sqrt{4u^2 + 2} \, du \, dv \\
 &= \int_0^1 \int_0^{-2u+2} \sqrt{4u^2 + 2} \, dv \, du \\
 &= \int_0^1 (-2u + 2) \sqrt{4u^2 + 2} \, du \\
 &= \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \frac{1}{3} \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

**Exercício 4** Realizando um esboço do sólido dado, obtemos a seguinte imagem



Como a fronteira deste sólido compreende uma superfície fechada, é possível aplicar o **Teorema da**

**Divergência de Gauss** para o cálculo do fluxo do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

através desta superfície. Ou seja

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} (3x + 1) dx dy dz \end{aligned}$$

sendo

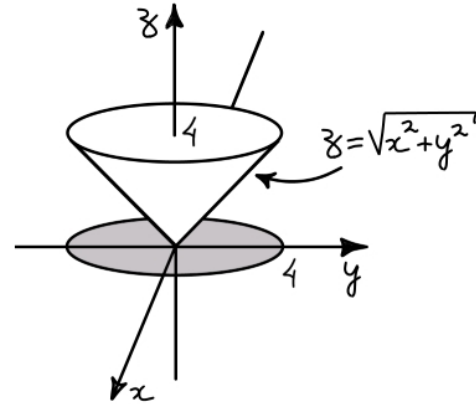
$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 6 \\ 0 \leq y \leq \frac{12 - 2x}{3} \\ 0 \leq z \leq \frac{12 - 2x - 3y}{4} \end{cases} ;$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds &= \int_0^6 \int_0^{\frac{12 - 2x}{3}} \int_0^{\frac{12 - 2x - 3y}{4}} (3x + 1) dz dy dx \\ &= \int_0^6 \int_0^{\frac{12 - 2x}{3}} (3x + 1) z \Big|_0^{\frac{12 - 2x - 3y}{4}} dy dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^6 \int_0^{\frac{12 - 2x}{3}} (3x + 1)(12 - 2x - 3y) dy dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^6 \int_0^{\frac{12 - 2x}{3}} (12 + 34x - 3y - 9xy - 6x^2) dy dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^6 \left( 12y + 34xy - \frac{3}{2}y^2 - \frac{9}{2}xy^2 - 6x^2y \right) \Big|_0^{\frac{12 - 2x}{3}} dx \\ &= \frac{1}{6} \int_0^6 (3x^3 - 35x^2 + 96x + 36) dx \\ &= \frac{1}{6} \left( \frac{3}{4}x^4 - \frac{35}{3}x^3 + 48x^2 + 36x \right) \Big|_0^6 \\ &= 66 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Exercício 5** Realizando um esboço da região em

questão obtemos a seguinte figura



Observe que a fronteira desta região é a curva dada pela seguinte parametrização

$$\Gamma : \begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 4 \sin t \\ z = 4 \end{cases} ; 0 \leq t \leq 2\pi$$

Assim, usando o **Teorema de Stokes**, temos que

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\Gamma \\ &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(4 \cos t, 4 \sin t, 4) \cdot (-4 \sin t, 4 \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-4 \sin t, 4 \cos t, -2) \cdot (-4 \sin t, 4 \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (16 \sin^2 t + 16 \cos^2 t) dt \\ &= 16 \int_0^{2\pi} dt \\ &= 32\pi \quad \blacksquare \end{aligned}$$