Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

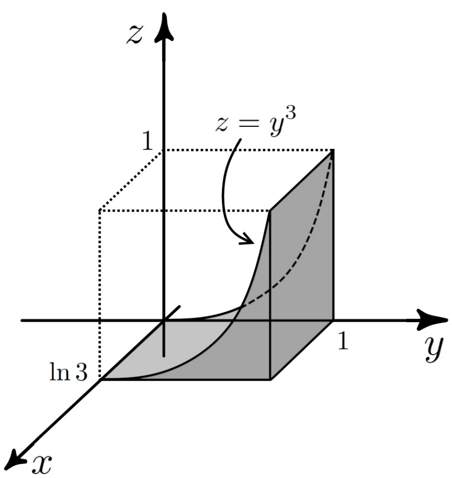
2º Semestre

Gabarito 2ª Prova **2018**
Data: Quarta-feira, 20 de Fevereiro **Turma A3**

Exercício 1 *Observe que o domínio e integração desta integral é o conjunto*

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq \ln 3 \\ \sqrt[3]{z} \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

Cujo esboço é dado na figura a seguir:



Segue-se portanto que este conjunto pode também ser expresso como

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq \ln 3 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq y^3 \end{cases}$$

Assim,

$$A = \int_0^1 \int_{\sqrt[3]{z}}^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x} \text{sen}\left(\pi y^2\right)}{y^2} dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_\Omega \frac{\pi e^{2x} \text{sen}\left(\pi y^2\right)}{y^2} dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\ln 3} \int_0^{y^3} \frac{\pi e^{2x} \text{sen}\left(\pi y^2\right)}{y^2} dz\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x} \text{sen}\left(\pi y^2\right)}{y^2} z \Bigg|_0^{y^3} dx\, dy$$

$$A = \int_0^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x} \text{sen}\left(\pi y^2\right) y^3}{y^2} dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\ln 3} \pi y \,\text{sen}\left(\pi y^2\right) e^{2x} dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \pi y \,\text{sen}\left(\pi y^2\right) \frac{e^{2x}}{2} \Bigg|_0^{\ln 3} dy$$

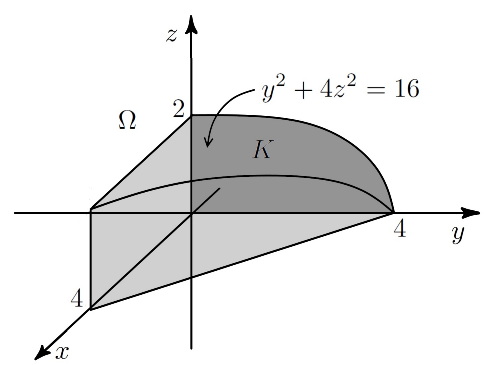
$$= \int_0^1 4\pi y \,\text{sen}\left(\pi y^2\right) dy$$

$$= -2\cos\left(\pi y^2\right) \Bigg|_0^1$$

$$= 4$$

■

Exercício 2 *Realizando um esboço do sólido em questão obtêm-se a seguinte figura:*



Este sólido pode ser expresso como

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 - y \\ (y, z) \in K \end{cases},$$

sendo K a face em destacada na figura. Desta forma, *segue-se que*

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \iiint_{\Omega} 1\, dx\, dy\, dz \\ &= \iint_K \int_0^{4-y} dx\, dy\, dz \\ &= \iint_K x \Big|_0^{4-y} dy\, dz \\ &= \iint_K (4-y)\, dy\, dz \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares adaptadas, ou seja

$$\begin{cases} y = r\cos\theta \\ z = \dfrac{1}{2} r \operatorname{sen}\theta \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \frac{1}{2} r,$$

O conjunto K neste referencial torna-se

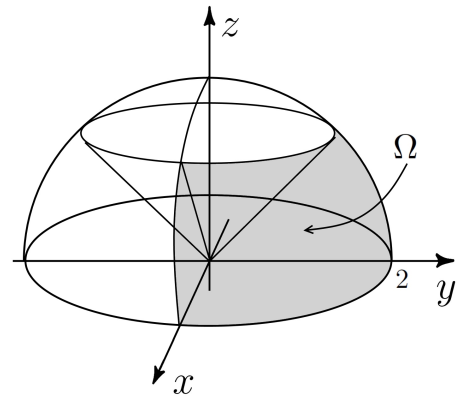
$$K_2 : \begin{cases} 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 4 \end{cases}$$

Portanto, tem-se que

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \iint_{K_2} (4 - r\cos\theta)\, |J|\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r\, (4 - r\cos\theta)\, d\theta\, dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 \left(4r\theta - r^2 \operatorname{sen}\theta\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 \left(2\pi r - r^2\right) dr \\ &= \frac{1}{2} \left(\pi r^2 - \frac{1}{3} r^3\right) \Big|_0^4 \\ &= 8\pi - \frac{32}{3} \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Realizando um esboço do sólido em questão, obtêm-se*



Usando ***coordenadas esféricas****, ou seja*

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi,$$

o conjunto Ω neste referencial torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le \rho \le 2 \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases},$$

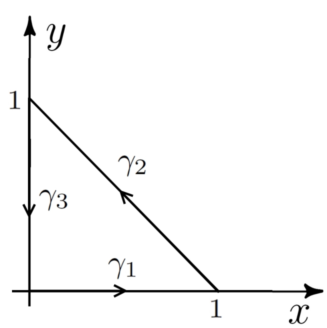
Assim,

$$\begin{aligned} B &= \iiint_{\Omega} (6 + 4y)\, dx\, dy\, dz \\ &= \iiint_{\Omega_2} (6 + 4\rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta)\, |J|\, d\rho\, d\varphi\, d\theta \\ &= \iiint_{\Omega_2} \left(6\rho^2 \operatorname{sen}\varphi + 4\rho^3 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}\theta\right) d\rho\, d\varphi\, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \left(6\rho^2 \operatorname{sen}\varphi + 4\rho^3 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}\theta\right) d\rho\, d\varphi\, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\rho^3 \operatorname{sen}\varphi + \rho^4 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}\theta\right) \Big|_0^2 d\varphi\, d\theta \\ &= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}\theta\right) d\varphi\, d\theta \\ &= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\cos\varphi + \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{2}\right) \operatorname{sen}\theta\right] \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \end{aligned}$$

$$B = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sqrt{2}}{3} + \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right)\operatorname{sen}\theta\right] d\theta$$
$$= 8\sqrt{2}\theta - (2\pi+4)\cos\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 4\sqrt{2}\pi + 2\pi + 4$$

■

Exercício 4 *A curva em questão possui o seguinte esboço*



Uma parametrização possivel para esta curva é dada por

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3,$$

sendo

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases} ;\, 0 \le t \le 1$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x(t) = 1-t \\ y(t) = t \end{cases} ;\, 0 \le t \le 1$$

$$-\gamma_3 : \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \end{cases} ;\, 0 \le t \le 1$$

Assim, segue-se que

$$B = \int_\gamma (x-y)dx + (x+y)dy$$
$$= \int_{\gamma_1} (x-y)dx + (x+y)dy +$$
$$+ \int_{\gamma_2} (x-y)dx + (x+y)dy +$$
$$+ \int_{\gamma_2} (x-y)dx + (x+y)dy$$
$$= \int_0^1 tdt + \int_0^1 -(1-2t)dt + dt - \int_0^1 tdt$$
$$= \int_0^1 2tdt$$
$$= 1$$

■

Exercício 5 *De acordo com o enunciado do problema, tem-se que a densidade do arame é homogênea, ou seja*

$$\delta(x,y,z) = k,\ k \in \mathbb{R}$$

e este arame está girando em torno do eixo z. Logo

$$d = \sqrt{x^2+y^2}$$

Além disso,o arame possui formato de uma circunferência de equação

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Uma parametrização possível para a curva que representa este arama é dada por

$$\gamma : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\operatorname{sen} t \quad ;\, 0 \le t \le 2\pi \\ z = 0 \end{cases}$$

Portanto

$$I = \int_\gamma d^2 \delta d\gamma$$
$$= \int_0^{2\pi} a^2 k \left\|\gamma'(t)\right\| dt$$
$$= ka^3 \int_0^{2\pi} dt$$
$$= 2\pi k a^3$$

■