

Universidade Federal do Vale do São Francisco  
Engenharia Civil  
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito 1ª Prova  
Data: Segunda-feira, 17 de Dezembro

2018  
Turma A3

**Exercício 1** Inicialmente, observe que

$$|x - y| = \begin{cases} x - y, & \text{se } x - y \geq 0 \\ -(x - y), & \text{se } x - y < 0 \end{cases}$$

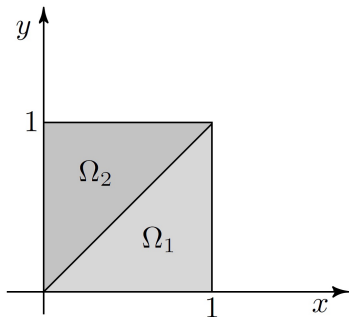
$$= \begin{cases} x - y, & \text{se } x \geq y \\ -x + y, & \text{se } x < y \end{cases}$$

Além disto, perceba que o domínio de integração é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases},$$

que pode ser expresso como

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$



sendo

$$\Omega_1 : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$$

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 |x - y| dx dy &= \iint_{\Omega} |x - y| dx dy \\ &= \iint_{\Omega_1} |x - y| dx dy + \\ &\quad + \iint_{\Omega_2} |x - y| dx dy \end{aligned}$$

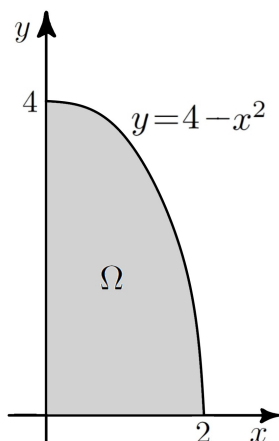
$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 |x - y| dx dy &= \int_0^1 \int_0^x |x - y| dy dx + \\ &\quad + \int_0^1 \int_x^1 |x - y| dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^x (x - y) dy dx + \\ &\quad + \int_0^1 \int_x^1 (-x + y) dy dx \\ &= \int_0^1 xy - \frac{1}{2}y^2 \Big|_0^x dx + \\ &\quad + \int_0^1 -xy + \frac{1}{2}y^2 \Big|_x^1 dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 dx + \\ &\quad + \int_0^1 \left( \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( x^2 - x + \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

■

**Exercício 2** Observe que o domínio de integração é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 4 - x^2 \end{cases},$$

cujo esboço é dado na seguinte figura



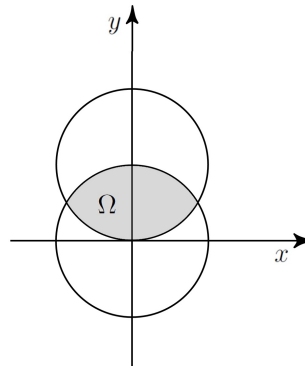
O conjunto  $\Omega$  também pode ser expresso como

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{4-y} \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

Assim, invertendo a ordem de integração, tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x e^{2y}}{4-y} dy dx &= \iint_{\Omega} \frac{x e^{2y}}{4-y} dx dy \\ &= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{x e^{2y}}{4-y} dx dy \\ &= \int_0^4 \frac{e^{2y}}{4-y} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{4-y}} dy \\ &= \int_0^4 \frac{e^{2y}}{4-y} \frac{4-y}{2} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 e^{2y} dy \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{2y}}{2} \Big|_0^4 \\ &= \frac{1}{4} (e^8 - 1) \end{aligned}$$

**Exercício 3** Realizando um esboço da lâmina em questão obtêm-se



De acordo como enunciado do problema, a densidade da lâmina é dada por

$$\delta(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Assim, a massa desta lâmina é

$$M(\Omega) = \iint_{\Omega} \delta(x, y) dx dy$$

Usando coordenadas polares,

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r,$$

o conjunto  $\Omega$  neste referencial torna-se

$$\Omega_2 = \Omega_a \cup \Omega_b \cup \Omega_c,$$

sendo

$$\Omega_a : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \\ 0 \leq r \leq 6 \sin \theta \end{cases},$$

$$\Omega_b : \begin{cases} \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6} \\ 0 \leq r \leq 3 \end{cases},$$

$$\Omega_c : \begin{cases} \frac{5\pi}{6} \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 6 \sin \theta \end{cases}$$

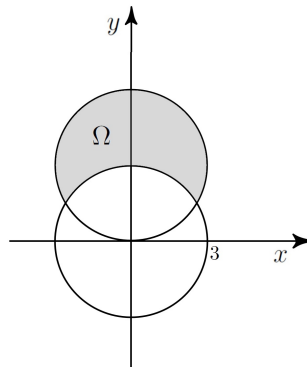
Portanto,

$$\begin{aligned}
 M(\Omega) &= \iint_{\Omega} \delta(x, y) dx dy \\
 &= \iint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \\
 &= \iint_{\Omega_2} \frac{1}{r} |J| dr d\theta \\
 &= \iint_{\Omega_2} \frac{1}{r} r dr d\theta \\
 &= \iint_{\Omega_2} dr d\theta \\
 &= \iint_{\Omega_a} dr d\theta + \iint_{\Omega_b} dr d\theta + \iint_{\Omega_c} dr d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{6 \operatorname{sen} \theta} dr d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_0^3 dr d\theta + \\
 &\quad + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} \int_0^{6 \operatorname{sen} \theta} dr d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} r \Big|_0^{6 \operatorname{sen} \theta} d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} r \Big|_0^3 d\theta + \\
 &\quad + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} r \Big|_0^{6 \operatorname{sen} \theta} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 6 \operatorname{sen} \theta d\theta + 3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} d\theta + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} 6 \operatorname{sen} \theta d\theta \\
 &= -6 \cos \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + 3\theta \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} - 6 \cos \theta \Big|_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} \\
 &= 12 - 6\sqrt{3} + 2\pi
 \end{aligned}$$

■

**Observação.:** Conforme pode ser visto na figura anterior existem três regiões delimitadas pelas circunferências dadas. Infelizmente o enunciado do problema não deixa claro a qual região se refere. Desta forma considerarei válida qualquer uma das escolhas. A seguir a solução para uma região diferente da considerada anteriormente.

**Outra Solução:** Realizando um esboço da lâmina em questão obtêm-se



De acordo como enunciado do problema, a densidade da lâmina é dada por

$$\delta(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Assim, a massa desta lâmina é

$$M(\Omega) = \iint_{\Omega} \delta(x, y) dx dy$$

Usando coordenadas polares,

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r,$$

o conjunto  $\Omega$  neste referencial torna-se

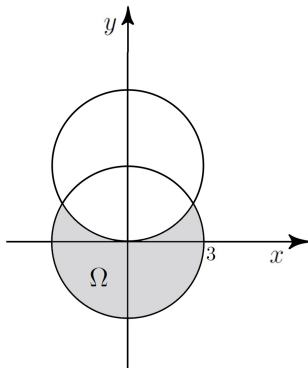
$$\Omega_2 : \begin{cases} \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6} \\ 3 \leq r \leq 6 \operatorname{sen} \theta \end{cases},$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 M(\Omega) &= \iint_{\Omega} \delta(x, y) dx dy \\
 &= \iint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \\
 &= \iint_{\Omega_2} \frac{1}{r} |J| dr d\theta \\
 &= \iint_{\Omega_2} \frac{1}{r} r dr d\theta \\
 &= \iint_{\Omega_2} dr d\theta \\
 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_3^{6 \operatorname{sen} \theta} dr d\theta \\
 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} r \Big|_3^{6 \operatorname{sen} \theta} d\theta \\
 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (6 \operatorname{sen} \theta - 3) d\theta \\
 &= -6 \cos \theta - 3\theta \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\
 &= 6\sqrt{3} - 2\pi
 \end{aligned}$$

■

**Outra Solução:** Realizando um esboço da lâmina em questão obtêm-se



De acordo como enunciado do problema, a densidade da lâmina é dada por

$$\delta(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Assim, a massa desta lâmina é

$$M(\Omega) = \iint_{\Omega} \delta(x, y) dx dy$$

Usando coordenadas polares,

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r,$$

o conjunto  $\Omega$  neste referencial torna-se

$$\Omega_2 = \Omega_a \cup \Omega_b \cup \Omega_c,$$

sendo

$$\Omega_a : \begin{cases} -\frac{7\pi}{6} \leq \theta \leq -\pi \\ 6 \operatorname{sen} \theta \leq r \leq 3 \end{cases},$$

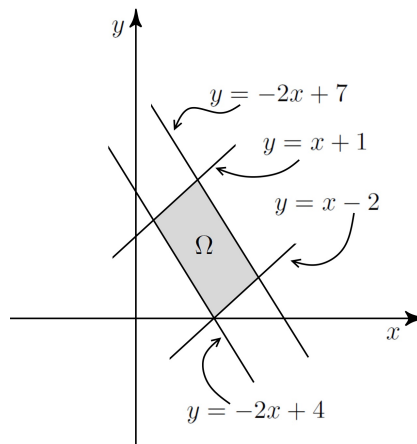
$$\Omega_b : \begin{cases} -\pi \leq \theta \leq 0 \\ 0 \leq r \leq 3 \end{cases},$$

$$\Omega_c : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \\ 6 \operatorname{sen} \theta \leq r \leq 3 \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 M(\Omega) &= \iint_{\Omega} \delta(x, y) dx dy \\
 &= \iint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \\
 &= \iint_{\Omega_2} \frac{1}{r} |J| dr d\theta \\
 &= \iint_{\Omega_2} \frac{1}{r} r dr d\theta \\
 &= \iint_{\Omega_2} dr d\theta \\
 &= \iint_{\Omega_a} dr d\theta + \iint_{\Omega_b} dr d\theta + \iint_{\Omega_c} dr d\theta \\
 &= \int_{-\frac{7\pi}{6}}^{-\pi} \int_{6 \operatorname{sen} \theta}^3 dr d\theta + \int_{-\pi}^0 \int_0^3 dr d\theta + \\
 &\quad + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_{6 \operatorname{sen} \theta}^3 dr d\theta \\
 &= \int_{-\frac{7\pi}{6}}^{-\pi} r \Big|_{6 \operatorname{sen} \theta}^3 d\theta + \int_{-\pi}^0 r \Big|_0^3 d\theta + \\
 &\quad + \int_0^{\frac{\pi}{6}} r \Big|_{6 \operatorname{sen} \theta}^3 d\theta \\
 &= \int_{-\frac{7\pi}{6}}^{-\pi} (3 - 6 \operatorname{sen} \theta) d\theta + 3 \int_{-\pi}^0 d\theta + \\
 &\quad + \int_0^{\frac{\pi}{6}} (3 - 6 \operatorname{sen} \theta) d\theta \\
 &= 3\theta + 6 \cos \theta \Big|_{-\frac{7\pi}{6}}^{-\pi} + 3\theta \Big|_{-\pi}^0 + 3\theta + 6 \cos \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} \\
 &= -12 + 4\pi + 6\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

**Exercício 4** Realizando um esboço da região  $\Omega$  obtêm-se



Considere a seguinte mudança de variável

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = y + 2x \\ v = y - x \end{cases}$$

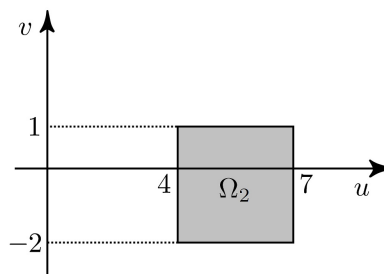
Segue-se desta escolha, que

$$\varphi : \begin{cases} x = \frac{u - v}{3} \\ y = \frac{u + 2v}{3} \end{cases},$$

cujo jacobiano é dado por

$$\begin{aligned}
 |J| &= \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \\
 &= \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Neste referencial, o conjunto  $\Omega$  torna-se



$$\Omega : \begin{cases} 4 \leq u \leq 7 \\ -2 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

Além disto, observe que

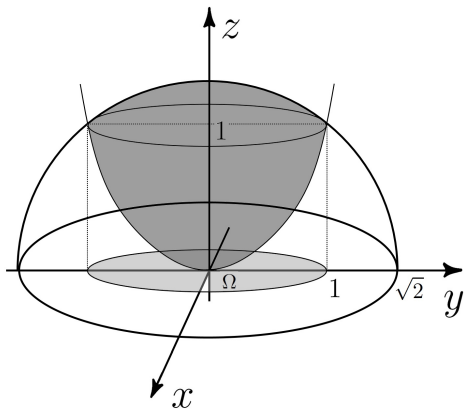
$$\begin{aligned} 2x^2 - xy - y^2 &= 2x^2 - xy + xy - xy - y^2 \\ &= 2x^2 - 2xy + xy - y^2 \\ &= 2x(x - y) + y(x - y) \\ &= (2x + y)(x - y) \\ &= -uv \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (2x^2 - xy - y^2) dx dy &= \iint_{\Omega_2} -uv du dv \\ &= - \int_{-2}^1 \int_4^7 uv du dv \\ &= - \int_{-2}^1 \frac{vu^2}{2} \Big|_4^7 dv \\ &= - \frac{33}{2} \int_{-2}^1 v dv \\ &= - \frac{33}{2} \frac{v^2}{2} \Big|_{-2}^1 \\ &= \frac{99}{4} \end{aligned}$$

■

**Exercício 5** Realizando um esboço do sólido em questão obtêm-se a seguinte figura



Logo, o volume deste sólido é dado por

$$V = \iint_{\Omega} [\sqrt{2 - x^2 - y^2} - (x^2 + y^2)] dx dy$$

Sendo  $\Omega$  o disco

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

Usando coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r$$

o conjunto  $\Omega$ , neste referencial, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\Omega_2} (\sqrt{2 - r^2} - r^2) |J| dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r (\sqrt{2 - r^2} - r^2) dr d\theta \\ &= \frac{\pi}{6} (8\sqrt{2} - 7) \end{aligned}$$

■