

Universidade Federal do Vale do São Francisco  
Engenharia Civil  
Cálculo Diferencial e Integral III

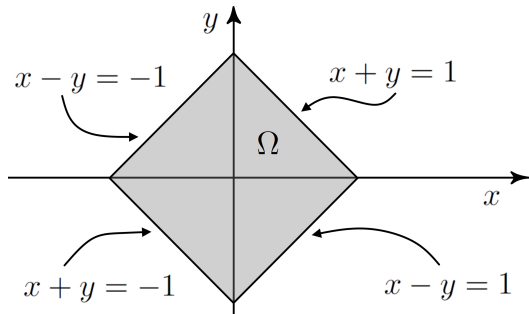
Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito Prova Final  
Data: Terça-feira, 2 de Outubro

2018  
Turma M3

**Exercício 1** Realizando um esboço do conjunto  $\Omega$  obtem-se



Considere a seguinte mudança de variável

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

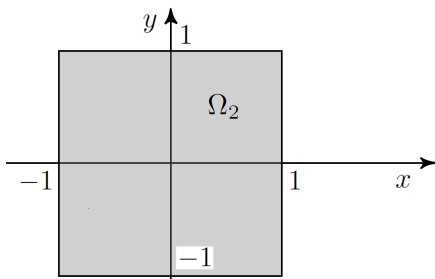
Segue-se desta escolha, que

$$\varphi : \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

cujos jacobiano é dado por

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{1}{2}$$

Neste referencial o conjunto  $\Omega$  torna-se



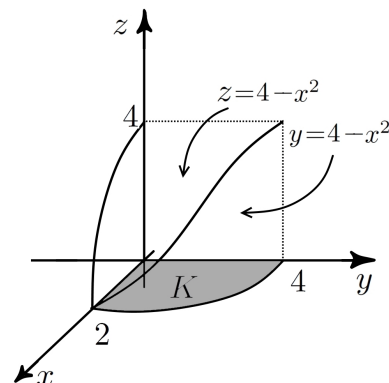
$$\Omega_2 : \begin{cases} -1 \leq u \leq 1 \\ -1 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} e^{x+y} dx dy &= \iint_{\Omega_2} e^u |J| du dv \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} e^u du dv \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} e^u \Big|_{-1}^1 dv \\ &= \frac{1}{2} (e - e^{-1}) \int_{-1}^1 dv \\ &= \frac{1}{2} (e - e^{-1}) v \Big|_{-1}^1 \\ &= e - e^{-1} \end{aligned}$$

■

**Exercício 2** Realizando um esboço do sólido em questão, obtemos a seguinte figura



Percebe-se portanto, que tal sólido pode ser expresso como

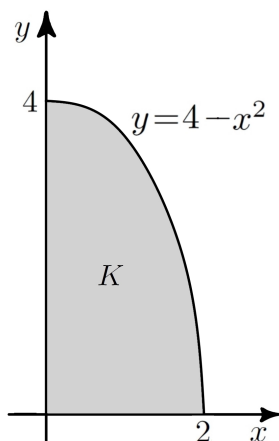
$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq z \leq 4 - x^2 \\ (x, y) \in K \end{cases}$$

Para calcular o volume deste sólido, é preciso resolver

a seguinte integral

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz \\ &= \iint_K \int_0^{4-x^2} z dz dx dy \\ &= \iint_K (4-x^2) dx dy \end{aligned}$$

Observe que



$$K : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 4 - x^2 \end{cases},$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} V &= \iint_K (4-x^2) dx dy \\ &= \int_0^2 \int_0^{4-x^2} (4-x^2) dy dx \\ &= \int_0^2 (4-x^2) \Big|_0^{4-x^2} dx \\ &= \int_0^2 (4-x^2)^2 dx \\ &= \int_0^2 (16-8x^2+x^4) dx \\ &= \frac{256}{15} \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (e^{-x}) - \frac{\partial}{\partial y} (1 - ye^{-x}) \\ &= -e^{-x} + e^{-x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo, como  $D_{\mathbf{F}} = \mathbb{R}^2$ , que é simplesmente conexo, a integral em questão é independente do caminho escolhido, importando apenas os pontos de início e fim do caminho, que neste caso são

$$A = (0, 1) \text{ e } B = (1, 2)$$

Escolhendo o segmento de reta que começa em  $A$  e termina em  $B$ , cuja parametrização é dada por

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 + t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

e considerando

$$I = \int_{\gamma} (1 - ye^{-x}) dx + e^{-x} dy$$

Temos que

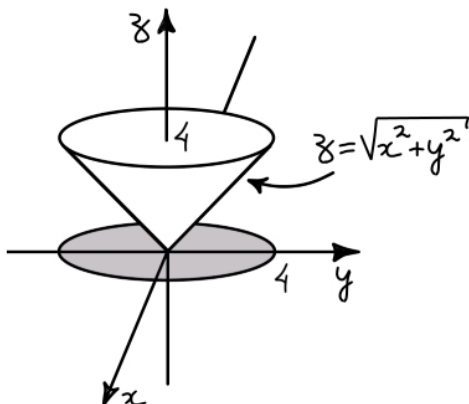
$$\begin{aligned} I &= \int_{\gamma_1} (1 - ye^{-x}) dx + e^{-x} dy \\ &= \int_0^1 [1 - (1+t)e^{-t}] dt + e^{-t} dt \\ &= \int_0^1 (1 - e^{-t} - te^{-t} + e^{-t}) dt \\ &= \int_0^1 (1 - te^{-t}) dt \\ &= [t + e^{-t}(t+1)] \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{e} \end{aligned}$$

**Exercício 3** Observe inicialmente que deseja-se calcular uma integral de linha do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (1 - ye^{-x}) \mathbf{i} + e^{-x} \mathbf{j}$$

**Exercício 4** Realizando um esboço da região em

questão obtemos a seguinte figura



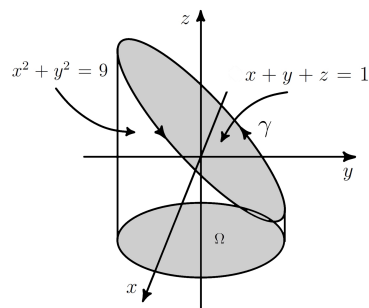
Observe que a fronteira desta região é a curva dada pela seguinte parametrização

$$\Gamma : \begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 4 \sin t \\ z = 4 \end{cases} ; 0 \leq t \leq 2\pi$$

Assim, usando o **Teorema de Stokes**, temos que

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\Gamma \\ &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(4 \cos t, 4 \sin t, 4) \cdot (-4 \sin t, 4 \cos t, 0) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-4 \sin t, 4 \cos t, -2) \cdot (-4 \sin t, 4 \cos t, 0) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (16 \sin^2 t + 16 \cos^2 t) \, dt \\ &= 16 \int_0^{2\pi} dt \\ &= 32\pi \end{aligned}$$

questão obtemos a seguinte figura



Observe que

$$\text{rot } \mathbf{F} = (0, x^2, y^2)$$

e a superfície  $\sigma$  em questão, pode ser parametrizada da seguinte forma

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - u - v \end{cases} ; \underbrace{u^2 + v^2 \leq 9}_{\Omega}$$

Ou seja

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = (1, 0, -1)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = (0, 1, -1)$$

e

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = (1, 1, 1)$$

Logo,

$$\mathbf{n} = \frac{(1, 1, 1)}{\|(1, 1, 1)\|}$$

Assim, usando o **Teorema de Stokes**, temos que

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\Gamma &= \iint_{\sigma} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= \iint_{\Omega} \text{rot } \mathbf{F}(\sigma(u, v)) \cdot \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} \sqrt{3} \, du \, dv \\ &= \iint_{\Omega} \text{rot } \mathbf{F}(u, v, 1 - u - v) \cdot (1, 1, 1) \, du \, dv \\ &= \iint_{\Omega} (0, u^2, v^2) \cdot (1, 1, 1) \, du \, dv \\ &= \iint_{\Omega} (u^2 + v^2) \, du \, dv \end{aligned}$$

**Exercício 5** Realizando um esboço da região em

Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$J = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = r$$

O conjunto  $\Omega$ , neste referencial, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

e disto, segue-se que

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\Gamma &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} r^2 r d\theta dr \\ &= \int_0^3 r^3 \theta \Big|_0^{2\pi} dr \\ &= 2\pi \int_0^3 r^3 dr \\ &= \frac{\pi r^4}{2} \Big|_0^3 \\ &= \frac{81\pi}{2} \end{aligned}$$

■