

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito 3^a Prova
Data: Segunda-feira, 1 de Outubro

2018
Turma M3

Exercício 1 Uma parametrização possível para a superfície em questão é dada por

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{v - u^2}{4} \end{cases}, (u, v) \in K$$

sendo

$$K : \begin{cases} 0 \leq u \leq 2 \\ 0 \leq v \leq 2 \end{cases}$$

Disto segue-se que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \left(1, 0, -\frac{u}{2}\right)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left(\frac{u}{2}, -\frac{1}{4}, 1\right)$$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| &= \sqrt{\frac{u^2}{4} + \frac{1}{16} + 1} \\ &= \sqrt{\frac{4u^2 + 17}{16}} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{4u^2 + 17} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 2 \leq v \leq 4 \\ 1 \leq w \leq 3 \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} x \, dS &= \iint_K u \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| \, du \, dv \\ &= \iint_K u \frac{1}{4} \sqrt{4u^2 + 17} \, du \, dv \\ &= \frac{1}{4} \int_0^2 \int_0^2 u \sqrt{4u^2 + 17} \, dv \, du \\ &= \frac{1}{4} \int_0^2 u \sqrt{4u^2 + 17} \Big|_0^2 \, du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 u \sqrt{4u^2 + 17} \, du \end{aligned}$$

Considere

$$\omega = 4u^2 + 17$$

e observe que

$$d\omega = 8u \, du$$

e

$$u = 0 \Rightarrow \omega = 17$$

$$u = 2 \Rightarrow \omega = 33$$

Ou seja

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} x \, dS &= \frac{1}{2} \int_0^2 u \sqrt{4u^2 + 17} \, du \\ &= \frac{1}{16} \int_{17}^{33} \sqrt{\omega} \, d\omega \\ &= \frac{1}{16} \frac{2}{3} \sqrt{\omega^3} \Big|_{17}^{33} \\ &= \frac{1}{24} \left(\sqrt{33^3} - \sqrt{17^3} \right) \\ &= \frac{33\sqrt{33} - 17\sqrt{17}}{24} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 A distância de um ponto de coordenadas (x, y, z) ao plano xy é dado por sua coordenada z , ou seja, a densidade da lâmina em questão é

$$\delta(x, y, z) = z$$

Além disto, a superfície dada pode ser parametrizada da seguinte forma

$$\sigma : \begin{cases} x = 2 \operatorname{sen} u \cos v \\ y = 2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, (u, v) \in K \\ z = 2 \cos u \end{cases}$$

sendo

$$K : \begin{cases} 0 \leq u \leq \pi \\ 0 \leq v \leq 2\pi \end{cases}$$

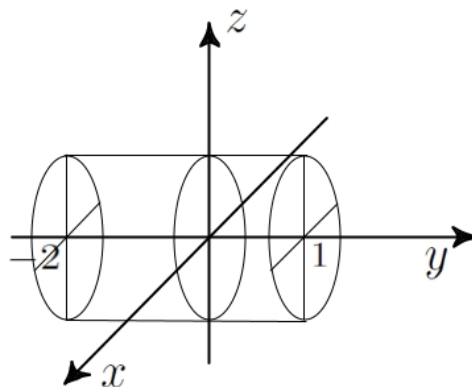
Desta escolha de parametrização segue-se que

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| = 4 \operatorname{sen} u$$

Assim,

$$\begin{aligned} M(\sigma) &= \iint_{\sigma} \delta(x, y, z) dS \\ &= \iint_K \delta(\sigma(u, v)) du dv \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} 2 \cos u \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| dv du \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} 8 \cos u \operatorname{sen} u dv du \\ &= \int_0^{\pi} 8 \cos u \operatorname{sen} u v \Big|_0^{2\pi} du \\ &= 16\pi \int_0^{\pi} \cos u \operatorname{sen} u du \\ &= 16\pi \frac{\cos^2 u}{2} \Big|_0^{\pi} \\ &= 8\pi (1 + 1) \\ &= 16\pi \end{aligned}$$

questão, obtêm-se



Uma parametrização possível para esta superfície é dada por

$$\sigma : \begin{cases} x = \cos u \\ y = v \\ z = \operatorname{sen} u \end{cases}, (u, v) \in K$$

com

$$K : \begin{cases} 0 \leq u \leq 2\pi \\ -2 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

Assim, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial u} &= (-\operatorname{sen} u, 0, \cos u) \\ \frac{\partial \sigma}{\partial v} &= (0, 1, 0) \\ \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} &= (-\cos u, 0, -\operatorname{sen} u) \end{aligned}$$

$$\mathbf{n} = - \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\|}$$

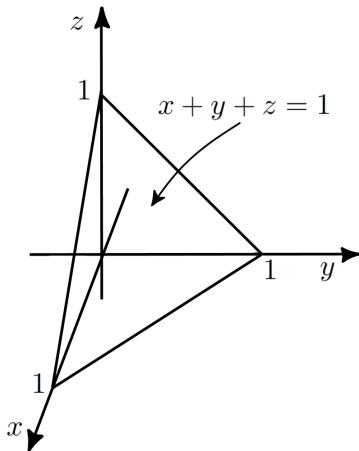
Exercício 3 Realizando um esboço da superfície em

E o fluxo de F através de σ , é dado por

$$\begin{aligned}\tau &= \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= \iint_{\sigma} \mathbf{F}(\sigma(u, v)) \cdot \left(-\frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\|} \right) dS \\ &= \iint_K F(\cos u, v, \sin u) \cdot (\cos u, 0, \sin u) \, du \, dv \\ &= \int_{-2}^1 \int_0^{2\pi} (\cos u, v, \sin u) \cdot (\cos u, 0, \sin u) \, du \, dv \\ &= \int_{-2}^1 \int_0^{2\pi} du \, dv \\ &= \text{Área}(K) \\ &= 6\pi\end{aligned}$$

■

Exercício 4 Um esboço do tetraedro em questão é dado na seguinte figura



Observe que

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y) + \frac{\partial}{\partial y} (xy) + \frac{\partial}{\partial z} (-2xz - y) \\ &= 2x + x - 2x \\ &= x\end{aligned}$$

Assim, como a fronteira do tetraedro é fechada e o $\operatorname{div} \mathbf{F}$ existe em todo seu interior, vale o **teorema da**

divergência de Gauss. Logo

$$\begin{aligned}\tau &= \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz\end{aligned}$$

Sendo Ω o objeto sólido que corresponde ao tetraedro, ou seja

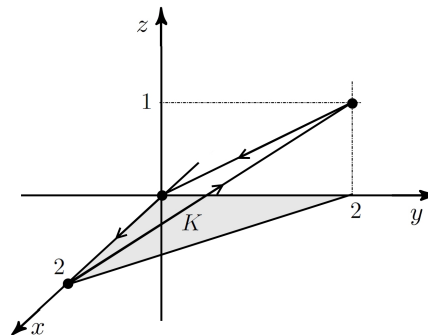
$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \\ 0 \leq z \leq 1 - x - y \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\tau &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} xz \Big|_0^{1-x-y} dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} x(1-x-y) dy \, dx \\ &= \int_0^1 \left(xy - x^2y - \frac{1}{2}y^2x \right) \Big|_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x \right) dx \\ &= \left(\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{24}\end{aligned}$$

■

Exercício 5 Um esboço da curva em questão é dado por



Observe que

$$\text{rot } \mathbf{F} = (-4, -6, 6y)$$

e o plano que contém os três pontos que formam o triângulo dado, possui equação

$$z = \frac{y}{2}$$

Assim, uma parametrização da superfície que representa o interior da curva Γ fronteira do triângulo em questão, pode ser dada por

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{v}{2} \end{cases}, (u, v) \in K$$

sendo

$$K : \begin{cases} 0 \leq u \leq 2 \\ 0 \leq v \leq 2 - u \end{cases}$$

Disto segue-se que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = (1, 0, 0)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left(0, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\|}$$

Como a curva Γ é fechada e o $\text{rot } \mathbf{F}$ existe na porção de superfície que representa o interior de Γ , é válido o **teorema de Stokes**, ou seja

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{F} \, d\Gamma &= \iint_{\sigma} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= \iint_{\sigma} \text{rot } \mathbf{F}(\sigma(u, v)) \cdot \left(\frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\|} \right) dS \\ &= \iint_{\sigma} \text{rot } \mathbf{F}(u, v, \frac{v}{2}) \cdot \left(\frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\|} \right) dS \\ &= \iint_K (-4, -6, 6v) \cdot \left(0, -\frac{1}{2}, 1\right) du \, dv \\ &= \int_0^2 \int_0^{2-u} (3 + 6v) \, dv \, du \\ &= \int_0^2 (3v + 3v^2) \Big|_0^{2-u} du \\ &= 3 \int_0^2 (6 - 5u + u^2) \, du \\ &= 3 \left(6u - \frac{5}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3\right) \Big|_0^2 \\ &= 14 \end{aligned}$$

■