Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Profº. Edson

1º Semestre

Gabarito 2ª Prova **2018**
Data: Domingo, 9 de Setembro **Turma M3**

Exercício 1 *Considere a seguinte mudança de variáveis*

$$\varphi^{-1}: \begin{cases} u = z - y \\ v = xy \\ w = x \end{cases}$$

Observe que

$$\varphi: \begin{cases} x = w \\ y = \dfrac{v}{w} \\ z = u + \dfrac{v}{w} \end{cases}$$

e seu jacobiano é dado por

$$\begin{aligned} |J| &= \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \\ &= \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{w} & -\dfrac{v}{w^2} \\ 1 & \dfrac{1}{w} & -\dfrac{v}{w^2} \end{matrix} \right\| \\ &= \frac{1}{w} \end{aligned}$$

Neste referencial o conjunto Ω dado no problema, torna-se

$$\begin{array}{rcccl} x = 1 & & & \Leftrightarrow & w = 1 \\ x = 3 & & & \Leftrightarrow & w = 3 \\ z = y & \Leftrightarrow & z - y = 0 & \Leftrightarrow & u = 0 \\ z = y + 1 & \Leftrightarrow & z - y = 1 & \Leftrightarrow & u = 1 \\ xy = 2 & & & \Leftrightarrow & v = 2 \\ xy = 4 & & & \Leftrightarrow & v = 4 \end{array}$$

Ou seja,

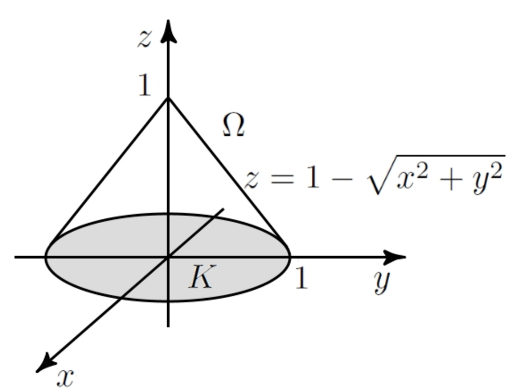
$$\Omega_2: \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 2 \le v \le 4 \\ 1 \le w \le 3 \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A &= \iiint_{\Omega} (z-y)^2\, dx\, dy\, dz \\ &= \iiint_{\Omega_2} u^2\, |J|\, du\, dv\, dw \\ &= \iiint_{\Omega_2} \frac{u^2}{w}\, du\, dv\, dw \\ &= \int_2^4 \int_1^3 \int_0^1 \frac{u^2}{w}\, du\, dw\, dv \\ &= \int_2^4 \int_1^3 \left.\frac{u^3}{3w}\right|_0^1 dw\, dv \\ &= \int_2^4 \int_1^3 \frac{1}{3w} dw\, dv \\ &= \int_2^4 \left.\frac{1}{3}\ln w\right|_1^3 dv \\ &= \int_2^4 \frac{1}{3}\ln 3\, dv \\ &= \frac{2}{3}\ln 3 \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Realizando um esboço da região Ω em questão, obtem-se*



Tal região pode ser descrita como

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \\ (x, y) \in K \end{cases}$$

Sendo K o círculo $x^2 + y^2 \leq 1$. Usando coordenadas cilíndricas, ou seja

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases},$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)}\right| = r$$

O conjunto Ω neste referencial torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 1 - r \end{cases}$$

Portanto

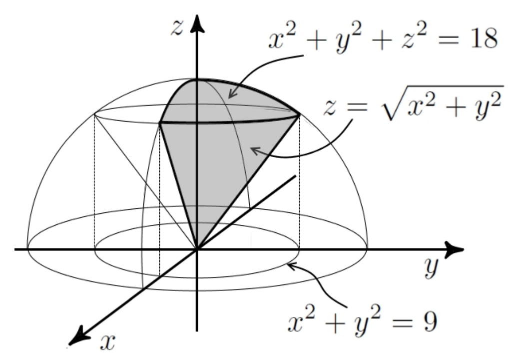
$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \iiint_\Omega 1 \, dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_{\Omega_2} |J| \, dr \, d\theta \, dz \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r} r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 rz \Big|_0^{1-r} dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r(1-r) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{3}r^3\right)\Big|_0^1 d\theta \\ &= \frac{1}{6}\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{1}{6}\,\theta\Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *O domínio de integração na integral dada é o conjunto*

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq y \leq 3 \\ 0 \leq x \leq \sqrt{9 - y^2} \\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{18 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

Realizando um esboço deste conjunto, obtem-se a seguinte figura



Usando coordenadas esféricas, ou seja

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases},$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi,$$

segue-se que, neste referencial o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{4} \\ 0 \leq \rho \leq 3\sqrt{2} \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
A &= \iiint_{\Omega} \left(x^2+y^2+z^2\right) dx\, dy\, dz \\
&= \iiint_{\Omega_2} \rho^2 \left|J\right| d\rho\, d\theta\, d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^4 \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\, d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3\sqrt{2}} -\rho^4 \cos\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} d\rho\, d\theta \\
&= \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3\sqrt{2}} \rho^4 d\rho\, d\theta \\
&= \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5}\rho^5 \Big|_0^{3\sqrt{2}} d\theta \\
&= 4\sqrt{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{243}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\
&= \frac{486\pi}{5}\left(\sqrt{2}-1\right)
\end{aligned}
$$

■

Exercício 4 *Uma parametrização possível para a curva γ é dada por*

$$
\gamma : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a \operatorname{sen} t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\int_{-\gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} &= -\int_{\gamma} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} \\
&= -\int_0^{2\pi} \frac{a^2\cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t}{a^2} dt \\
&= -\int_0^{2\pi} dt \\
&= -2\pi
\end{aligned}
$$

■

Exercício 5 *Observe que*

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Rot}\mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+\cos y\right) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy) \\
&= 2x - 2x \\
&= 0
\end{aligned}
$$

e

$$
\operatorname{Dom}_{\mathbf{F}} = \mathbb{R}^2 \,(simplesmente\, conexo)
$$

Logo, F é um campo conservativo, ou seja a integral de linha sobre F não depende do caminho, importando apenas os pontos inicial e final da curva γ. Perceba, portanto que

$$
\begin{aligned}
\gamma(0) &= (0,0) \\
\gamma(\pi) &= \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Considere a curva $\alpha = \gamma_1 \cup \gamma_2$, sendo

$$
\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, \quad 0 \le t \le \pi
$$

$$
\gamma_2 : \begin{cases} x = \pi \\ y = t \end{cases}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}
$$

A curva α possui os mesmos pontos inicial e final da curva γ. Trocando γ por α e calculando a integral dada, tem-se

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma} \mathbf{F}\, d\gamma &= \int_{\alpha} \mathbf{F}\, d\alpha \\
&= \int_{\gamma_1} \mathbf{F}\, d\gamma + \int_{\gamma_2} \mathbf{F}\, d\gamma \\
&= \int_0^{\pi} \mathbf{F}\left(\gamma_1(t)\right)\cdot \gamma_1'(t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{F}\left(\gamma_2(t)\right) \cdot \gamma_2'(t) dt \\
&= \int_0^{\pi} \left(0, t^2+1\right)\cdot(1,0) dt + \\
&\quad + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\pi t, \pi^2+\cos t\right)\cdot (0,1) dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi^2+\cos t) dt \\
&= \left(\pi^2 t + \operatorname{sen} t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi^3}{2} + 1
\end{aligned}
$$

■