

Universidade Federal do Vale do São Francisco  
Engenharia Civil  
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Edson

1º Semestre

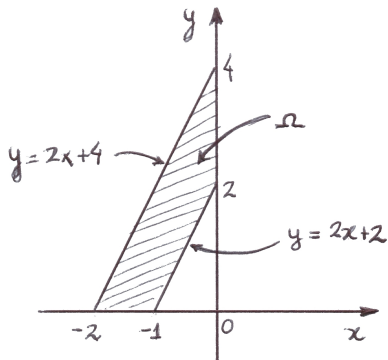
Gabarito 1ª Prova  
Data: Domingo, 9 de Setembro

2018  
Turma M3

**Exercício 1** Desejamos calcular a integral

$$\iint_{\Omega} \frac{2y+x}{y-2x} dx dy$$

onde  $\Omega$  é o trapézio esboçado na figura abaixo



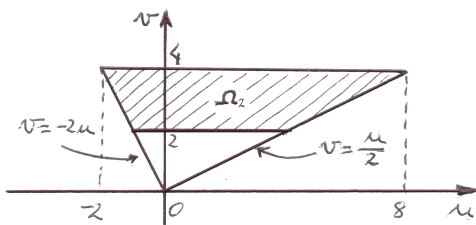
Para isto, considere a seguinte mudança de variáveis

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = 2y + x \\ v = y - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \varphi : \begin{cases} x = \frac{u - 2v}{5} \\ y = \frac{2u + v}{5} \end{cases},$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \frac{1}{5}$$

e, neste novo sistema de coordenadas, o conjunto  $\Omega$  torna-se



$$\Omega_2 : \begin{cases} -\frac{v}{2} \leq u \leq 2v \\ 2 \leq v \leq 4 \end{cases}$$

e, disto segue-se que

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{2y+x}{y-2x} dx dy &= \iint_{\Omega_2} \frac{u}{v} \frac{1}{5} du dv \\ &= \frac{1}{5} \int_2^4 \int_{-\frac{v}{2}}^{2v} \frac{u}{v} du dv \\ &= \frac{1}{5} \int_2^4 \frac{u^2}{2v} \Big|_{-\frac{v}{2}}^{2v} dv \\ &= \frac{1}{10} \int_2^4 \left( 4v - \frac{v}{4} \right) dv \\ &= \frac{3}{16} v^2 \Big|_2^4 \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

■

**Exercício 2**

a).

$$\begin{aligned} \int_1^4 \int_{x^2}^x \sqrt{\frac{y}{x}} dy dx &= \int_1^4 \int_{x^2}^x \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} dy dx \\ &= \int_1^4 \frac{2}{3} \frac{\sqrt{y^3}}{\sqrt{x}} \Big|_{x^2}^x dx \\ &= \frac{2}{3} \int_1^4 \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{x^6}}{\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{2}{3} \int_1^4 \left( x - x^{\frac{5}{2}} \right) dx \\ &= \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{7} \sqrt{x^7} \right) \Big|_1^4 \\ &= \frac{2}{3} \left( -\frac{200}{7} - \frac{3}{14} \right) \\ &= -\frac{403}{21} \end{aligned}$$

□

b).

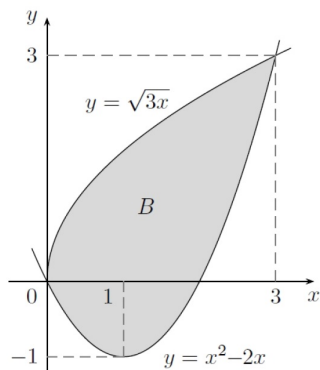
$$\begin{aligned}
 \int_0^3 \int_0^x x^2 e^{xy} dy dx &= \int_0^3 x^2 \frac{1}{x} e^{xy} \Big|_0^x dx \\
 &= \int_0^3 (x e^{x^2} - x) dx \\
 &= \frac{1}{2} (e^{x^2} - x^2) \Big|_0^3 \\
 &= \frac{1}{2} (e^9 - 9) - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{e^9}{2} - 5
 \end{aligned}$$

■

**Exercício 3** O domínio de integração na integral dada é o conjunto

$$B : \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 2x \leq y \leq \sqrt{3x} \end{cases}$$

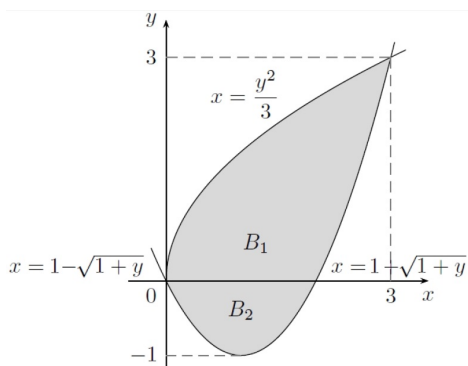
Desenhando este conjunto, teremos a seguinte figura



Donde segue-se que o conjunto  $B$  pode ser reescrito como

$$B = B_1 \cup B_2$$

onde



$$B_1 : \begin{cases} \frac{y^2}{3} \leq x \leq 1 + \sqrt{1+y} \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

e

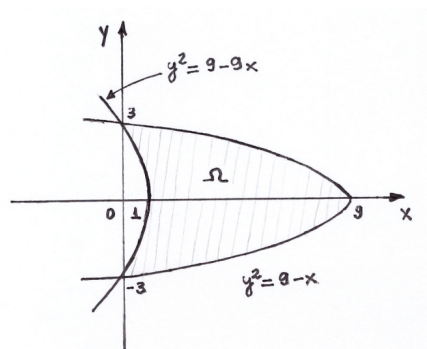
$$B_2 : \begin{cases} 1 - \sqrt{1+y} \leq x \leq 1 + \sqrt{1+y} \\ -1 \leq y \leq 0 \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 \int_{x^2-2x}^{\sqrt{3x}} f(x,y) dy dx &= \iint_B f(x,y) dx dy \\
 &= \iint_{B_1} f(x,y) dx dy + \\
 &\quad + \iint_{B_2} f(x,y) dx dy \\
 &= \int_0^3 \int_{\frac{y^2}{3}}^{1+\sqrt{1+y}} f(x,y) dx dy + \\
 &\quad + \int_{-1}^0 \int_{1-\sqrt{1+y}}^{1+\sqrt{1+y}} f(x,y) dx dy
 \end{aligned}$$

■

**Exercício 4** A região plana  $\Omega$  compreendida entre as curvas  $y^2 = 9 - x$  e  $y^2 = 9 - 9x$  pode ser visualizada no seguinte esboço



Observe então, que a região  $\Omega$  pode ser descrita do seguinte modo

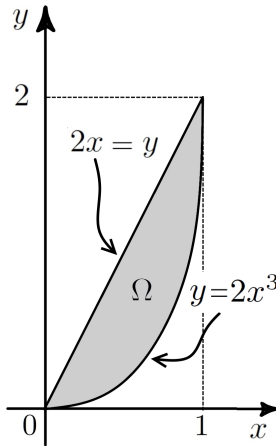
$$\Omega : \begin{cases} \frac{9-y^2}{9} \leq x \leq 9-y^2 \\ -3 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 \text{Área}(\Omega) &= \iint_{\Omega} dx dy \\
 &= \int_{-3}^3 \int_{\frac{9-y^2}{9}}^{9-y^2} dx dy \\
 &= \int_{-3}^3 x \Big|_{\frac{9-y^2}{9}}^{9-y^2} dy \\
 &= \frac{1}{9} \int_{-3}^3 (72 - 8y^2) dy \\
 &= \frac{1}{9} \left( 72y - \frac{8}{3}y^3 \right) \Big|_{-3}^3 \\
 &= \frac{144 + 144}{9} \\
 &= 32
 \end{aligned}$$

■

**Exercício 5** Realizando um esboço da lâmina em questão, tem-se



Chamando de  $\Omega$  o conjunto que representa esta lâmina, segue-se que

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 2x^3 \leq y \leq 2x \end{cases}$$

e a massa desta lâmina é dada por

$$M = \iint_{\Omega} \delta(x, y) dx dy$$

sendo  $\delta$  a densidade da mesma. De acordo com o enunciado do problema,  $\delta(x, y)$  é proporcional ao produto das distâncias de  $(x, y)$  aos eixos coordenados, ou seja

$$\delta(x, y) = kxy, \quad k \in \mathbb{R}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 M &= \int_0^1 \int_{2x^3}^{2x} kxy dy dx \\
 &= k \int_0^1 \frac{xy^2}{2} \Big|_{2x^3}^{2x} dx \\
 &= \frac{k}{2} \int_0^1 x (4x^2 - 4x^6) dx \\
 &= \frac{k}{2} \left( x^4 - \frac{1}{2}x^8 \right) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{k}{4} \\
 x_c &= \frac{1}{M} \iint_{\Omega} x \delta(x, y) dx dy \\
 &= \frac{4}{k} \int_0^1 \int_{2x^3}^{2x} kx^2 y dy dx \\
 &= 4 \int_0^1 \frac{x^2 y^2}{2} \Big|_{2x^3}^{2x} dx \\
 &= 2 \int_0^1 x^2 (4x^2 - 4x^6) dx \\
 &= 2 \left( \frac{4}{5}x^5 - \frac{4}{9}x^9 \right) \Big|_0^1 \\
 &= 2 \left( \frac{4}{5} - \frac{4}{9} \right) \\
 &= \frac{32}{45}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 y_c &= \frac{1}{M} \iint_{\Omega} y \delta(x, y) dx dy \\
 &= \frac{4}{k} \int_0^1 \int_{2x^3}^{2x} kxy^2 dy dx \\
 &= 4 \int_0^1 \frac{xy^3}{3} \Big|_{2x^3}^{2x} dx \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^1 x (8x^3 - 8x^9) dx \\
 &= \frac{4}{3} \left( \frac{8}{5}x^5 - \frac{8}{11}x^{11} \right) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{64}{55}
 \end{aligned}$$

■