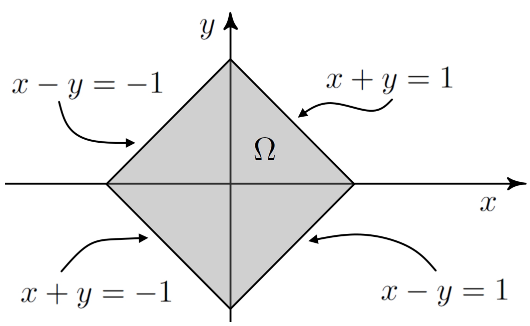
Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito Prova Final **2016**
Data: 20 de Maio de 2017 **Turma E3**

Exercício 1 *Realizando um esboço do conjunto Ω obtem-se*



Considere a seguinte mudança de variável

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

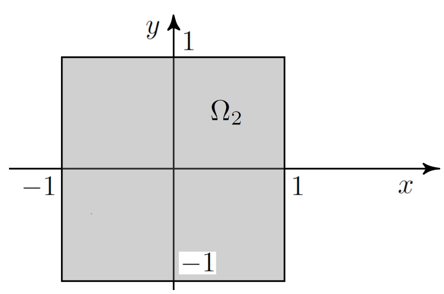
Segue-se desta escolha, que

$$\varphi : \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \frac{1}{2}$$

Neste referencial o conjunto Ω torna-se



$$\Omega_2 : \begin{cases} -1 \leq u \leq 1 \\ -1 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

Portanto

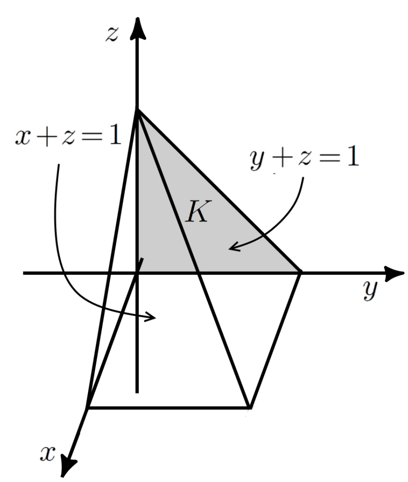
$$\begin{aligned} \iint_\Omega e^{x+y} dx\, dy &= \iint_{\Omega_2} e^u \,|J|\, du\, dv \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2} e^u du\, dv \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} e^u \Big|_{-1}^{1} dv \\ &= \frac{1}{2}\left(e - e^{-1}\right) \int_{-1}^{1} dv \\ &= \frac{1}{2}\left(e - e^{-1}\right) v \Big|_{-1}^{1} \\ &= e - e^{-1} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Inicialmente observe que a distância de um ponto qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ao eixo z é*

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Além disto, um esboçando o sólido em questão obtem-se



Tal sólido pode ser descrito como,

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 - z \\ 0 \leq y \leq 1 - z \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned} I &= \iiint_\Omega r^2 \delta \, dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_\Omega \left(x^2 + y^2\right) z \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-z} \left(x^2 + y^2\right) z \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x\right) z \, \Big|_0^{1-z} dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \left[\frac{(1-z)^3}{3} + y^2 (1-z)\right] z dy \, dz \\ &= \int_0^1 \left[\frac{(1-z)^3}{3} y + \frac{y^3}{3} (1-z)\right] z \, \Big|_0^{1-z} dz \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 (1-z)^4 \, z \, dz \end{aligned}$$

Considere a seguinte mudança de variável

$$\omega = 1 - z$$

Desta escolha segue-se que

$$d\omega = -dz$$

$$z = 0 \Rightarrow \omega = 1$$

$$z = 1 \Rightarrow \omega = 0$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{3} \int_0^1 (1-z)^4 \, z \, dz \\ &= -\frac{2}{3} \int_1^0 \omega^4 (1 - \omega) \, d\omega \\ &= -\frac{2}{3} \left(\frac{\omega^5}{5} - \frac{\omega^6}{6}\right) \Big|_1^0 \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{1}{45} \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Uma parametrização possível para o segmento de reta do ponto* $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ *ao ponto* $(0, 0)$ *é dada por*

$$\gamma_2 : \begin{cases} x(t) = \dfrac{3}{2} - t \\ y(t) = \dfrac{3}{2} - t \end{cases} ; \, 0 \leq t \leq \frac{3}{2}$$

e a curva correspondente à fronteira da região em questão é

$$\bar{\gamma} = \gamma \cup \gamma_2$$

onde

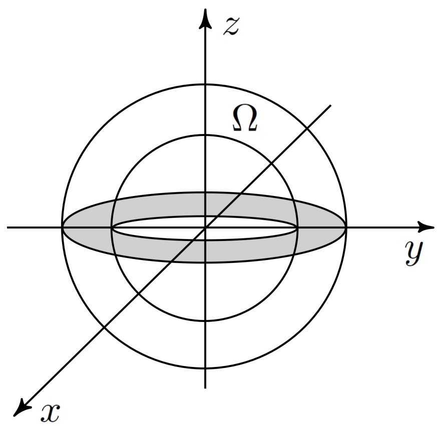
$$\gamma : \begin{cases} x(t) = \dfrac{3t}{1 + t^3} \\ y(t) = \dfrac{3t^2}{1 + t^3} \end{cases} ; \, 0 \leq t \leq 1$$

Assim, a área procurada será

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \oint_{\bar{\gamma}} x dy - y dy \\ &= \frac{1}{2} \oint_\gamma x dy - y dy + \frac{1}{2} \oint_{\gamma_2} x dy - y dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{3t}{1 + t^3} \frac{6t - 3t^4}{(1 + t^3)^2} dt - \frac{3t^2}{1 + t^3} \frac{3 - 6t^3}{(1 + t^3)^2} dt + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{3}{2} - t\right) dt + \left(\frac{3}{2} - t\right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{18t^2 - 9t^5 - 9t^2 + 18t^5}{(1 + t^3)^3} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{9t^2 + 9t^5}{(1 + t^3)^3} dt \\ &= \frac{9}{2} \int_0^1 \frac{t^2 \left(1 + t^3\right)}{(1 + t^3)^3} dt \\ &= \frac{9}{2} \int_0^1 \frac{t^2}{(1 + t^3)^2} dt \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Realizando um esboço da região σ em questão obtem-se a seguinte figura:*



Perceba que trata-se de uma superfície fechada cujo interior é o conjunto Ω simplesmente conexo no qual o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$$

*está definido. Deste modo, aplicando o **teorema da divergência de Gauss**, tem-se que o fluxo de $\mathbf{F}$ através da superfície σ pode ser calculado da seguinte forma*

$$\begin{aligned} fluxo &= \iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds \\ &= \iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\,dx\,dy\,dz \end{aligned}$$

Onde

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)+ \\ &+\frac{\partial}{\partial y}\left(y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)+ \\ &+\frac{\partial}{\partial z}\left(z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \\ &= 4\sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$fluxo = \iiint_\Omega 4\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$$

Usando coordenadas esféricas,

$$\begin{cases} x = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}\right| = \rho^2\mathrm{sen}\,\varphi$$

o conjunto Ω neste referencial torna-se

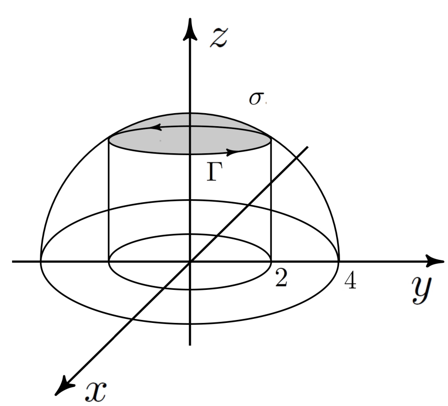
$$\Omega_2 : \begin{cases} 1 \le \rho \le \sqrt{2} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} fluxo &= \iiint_\Omega 4\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz \\ &= \iiint_{\Omega_2} 4\rho\,|J|\,d\rho\,d\theta\,d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{\sqrt{2}} 4\rho^3\,\mathrm{sen}\,\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \rho^4\mathrm{sen}\,\varphi\,\Big|_1^{\sqrt{2}}\,d\varphi\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 3\,\mathrm{sen}\,\varphi\,d\varphi\,d\theta \\ &= 3\int_0^{2\pi} -\cos\varphi\,\Big|_0^{\pi}\,d\theta \\ &= 6\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 6\,\theta\,\Big|_0^{2\pi} \\ &= 12\pi \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Realizando um esboço da região dada tem-se*



Como Γ é uma curva fechada e o campo vetorial em questão

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x^2y^3\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Obedece aos requisitos necessários ao uso do Teorema de Stokes, segue-se que

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\Gamma = \iint_\sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$$

Uma parametrização possível para a superfície σ pode ser dada como

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{16-u^2-v^2} \end{cases}, \underbrace{u^2+v^2\leq 4}_{\Omega}$$

onde

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{16-u^2-v^2}}\right)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{16-u^2-v^2}}\right)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v} = \left(\frac{u}{\sqrt{16-u^2-y^2}}, \frac{v}{\sqrt{16-u^2-v^2}}, 1\right)$$

e

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^3 & 1 & z \end{vmatrix}$$

$$= (0, 0, -3x^2y^2)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A &= \int_\Gamma x^2y^3dx + dy + z\,dz \\ &= \iint_\sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds \\ &= \iint_\Omega \operatorname{rot}\mathbf{F}(\sigma(u,v))\cdot\frac{\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}}{\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\|}\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\| du\,dv \\ &= \iint_\Omega (0,0,-3u^2v^2)\cdot\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)du\,dv \\ &= \iint_\Omega -3u^2v^2du\,dv \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}, |J| = r$$

O conjunto Ω neste referencial torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0\leq r\leq 2 \\ 0\leq\theta\leq 2\pi \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} A &= \iint_\Omega -3u^2v^2du\,dv \\ &= \iint_{\Omega_2} -3r^2\cos^2\theta\, r^2\operatorname{sen}^2\theta\ |J|\ dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 -3r^5\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}r^6\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta\right)\Big|_0^2 d\theta \\ &= -32\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta d\theta \\ &= -32\int_0^{2\pi}(\cos\theta\operatorname{sen}\theta)^2\,d\theta \\ &= -32\int_0^{2\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\right)^2 d\theta \\ &= -8\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2 2\theta\,d\theta \\ &= -8\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos4\theta}{2}d\theta \\ &= -4\int_0^{2\pi}(1-\cos4\theta)\,d\theta \\ &= -4\left(\theta - \frac{\operatorname{sen}4\theta}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} \\ &= -8\pi \end{aligned}$$

□

(Outro modo): *Uma parametrização possível para a curva Γ é dada por*

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\operatorname{sen}t \\ z(t) = \sqrt{12} \end{cases}, 0\leq t\leq 2\pi$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
A &= \int_\Gamma x^2 y^3 dx + dy + z\,dz \\
&= \int_0^{2\pi} 4\cos^2 t\, 8\,\mathrm{sen}^3 t\,(-2\mathrm{sen}\, t) dt + 2\cos t dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-64\cos^2 t\,\mathrm{sen}^4 t + 2\cos t\right) dt \\
&= -8\pi
\end{aligned}
$$

■