

Universidade Federal do Vale do São Francisco  
Engenharia Civil  
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Edson

2º Semestre

Gabarito 3ª Prova  
Data: 15 de Maio de 2017

2016  
Turma E3

**Exercício 1** Uma parametrização possível para o segmento de reta do ponto  $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$  ao ponto  $(0, 0)$  é dada por

$$\gamma_2 : \begin{cases} x(t) = \frac{3}{2} - t \\ y(t) = \frac{3}{2} - t \end{cases} ; 0 \leq t \leq \frac{3}{2}$$

e a curva correspondente à fronteira da região em questão é

$$\bar{\gamma} = \gamma \cup \gamma_2$$

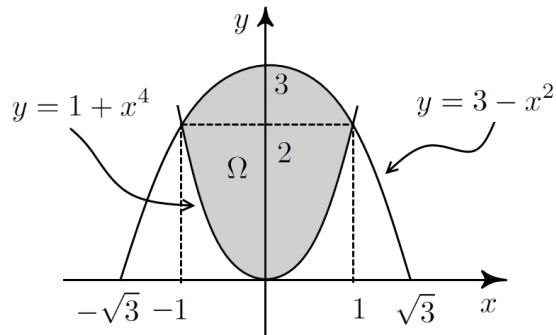
onde

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases} ; 0 \leq t \leq 1$$

Assim, a área procurada será

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \oint_{\bar{\gamma}} x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2} \oint_{\gamma} x dy - y dx + \frac{1}{2} \int_{\gamma_2} x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{3t}{1+t^3} \frac{6t-3t^4}{(1+t^3)^2} dt - \frac{3t^2}{1+t^3} \frac{3-6t^3}{(1+t^3)^2} dt + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{3}{2}} -\left(\frac{3}{2}-t\right) dt + \left(\frac{3}{2}-t\right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{18t^2 - 9t^5 - 9t^2 + 18t^5}{(1+t^3)^3} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{9t^2 + 9t^5}{(1+t^3)^3} dt \\ &= \frac{9}{2} \int_0^1 \frac{t^2(1+t^3)}{(1+t^3)^3} dt \\ &= \frac{9}{2} \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^3)^2} dt \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

**Exercício 2** Realizando um esboço do sólido em questão, obtém-se a seguinte figura



Observe que o conjunto  $\Omega$  que compreende a região delimitada pelas curvas  $y = 3 - x^2$  e  $y = 1 + x^4$  é simplesmente conexo e as funções

$$\begin{aligned} P(x, y) &= xy^2 \\ Q(x, y) &= x^2y + 3x \end{aligned}$$

estão definidas para  $\forall (x, y) \in \Omega$ . Assim, usando o teorema de Green, tem-se

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

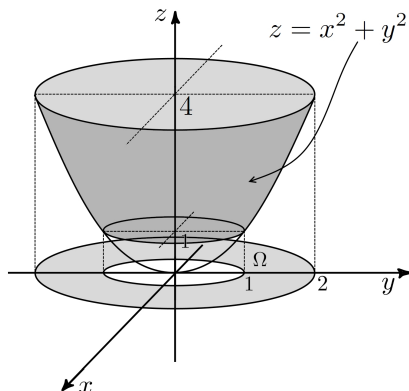
Ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} xy^2 dx + (x^2y + 3x) dy &= \iint_{\Omega} (2xy + 3 - 2xy) dx dy \\ &= \iint_{\Omega} 3 dx dy \\ &= 3 \text{Área}(\Omega) \\ &= 3 \int_{-1}^1 (3 - x^2 - 1 - x^4) dx \\ &= 3 \left( 2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{44}{5} \end{aligned}$$

■

■

**Exercício 3** Realizando um esboço da região, obtêm-se



Uma parametrização possível para esta região é dada por

$$\sigma : \begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = u^2 + v^2 \end{cases} ; \underbrace{1 \leq u^2 + v^2 \leq 4}_{\Omega}$$

Disto segue-se que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = (1, 0, 2u)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = (0, 1, 2v)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} &= (-2u, -2v, 1) \\ \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| &= \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1} \end{aligned}$$

e a área da superfície  $\sigma$  é

$$\begin{aligned} A &= \iint_{\sigma} ds \\ &= \iint_{\Omega} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du dv \\ &= \iint_{\Omega} \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1} du dv \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares,

$$\begin{cases} u = r \cos \theta \\ v = r \sin \theta \end{cases}$$

cujos jacobiano é

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = r$$

O conjunto  $\Omega$  neste referencial, torna-se

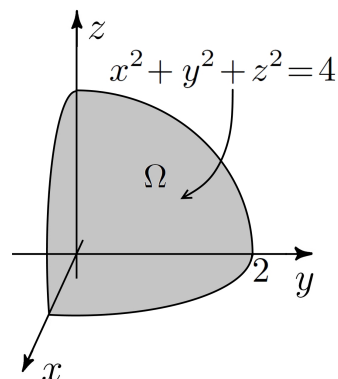
$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 1 \leq r \leq 2 \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{4r^2 + 1} |J| dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 r \sqrt{4r^2 + 1} dr d\theta \\ &= \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}) \end{aligned}$$

■

**Exercício 4** Realizando um esboço da região  $\sigma$  em questão obtém-se a seguinte figura:



Perceba que trata-se de uma superfície fechada cujo interior é o conjunto  $\Omega$  simplesmente conexo no qual o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \mathbf{i} - 2xy \mathbf{j} + 3xz \mathbf{k}$$

está definido. Deste modo, aplicando o **teorema da divergência de Gauss**, tem-se que o fluxo de  $\mathbf{F}$  através da superfície  $\sigma$  pode ser calculado da seguinte forma

$$\begin{aligned} \text{fluxo} &= \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds \\ &= \iiint_{\Omega} \text{div } \mathbf{F} dx dy dz \end{aligned}$$

Onde

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x} (x^2) + \frac{\partial}{\partial y} (-2xy) + \frac{\partial}{\partial z} (3xz) \\ &= 2x - 2x + 3x \\ &= 3x \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\text{fluxo} = \iiint_{\Omega} 3x \, dx \, dy \, dz$$

Usando coordenadas esféricas,

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases},$$

cujos jacobiano é

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} \right| = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi$$

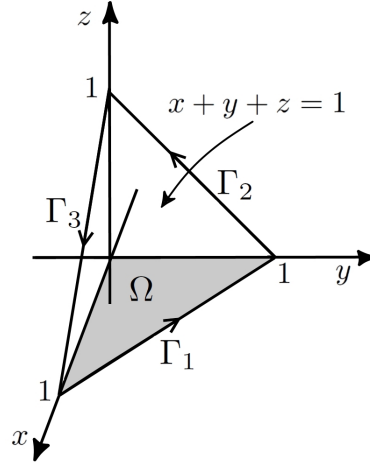
o conjunto  $\Omega$  neste referencial torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{fluxo} &= \iiint_{\Omega} 3x \, dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_{\Omega_2} 3\rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta |J| \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 3\rho^3 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left. \frac{3}{4} \rho^4 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \theta \right|_0^2 \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{4} 16 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 12 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen} \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \, d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 12 \operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi \\ &= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \, d\varphi \\ &= 6 \left( \varphi - \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 6 \frac{\pi}{2} \\ &= 3\pi \end{aligned}$$

**Exercício 5** Realizando um esboço da região dada tem-se



Uma parametrização possível para esta região pode ser dada por

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - u - v \end{cases} ; (u, v) \in \Omega$$

Sendo

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 - u \end{cases}$$

Como a curva correspondente à fronteira desta superfície

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

é uma curva fechada e o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$$

está definido sobre a superfície  $\sigma$  e atende às condições exigidas pelo **teorema de Stokes**, segue-se que

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\Gamma = \iint_{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

Observe que

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = (-x, 0, z - 1) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F}(\sigma(u, v)) &= \operatorname{rot} \mathbf{F}(u, v, 1 - u - v) \\ &= (-u, 0, -u - v) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = (1, 0, -1)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = (0, 1, -1)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = (1, 1, 1)$$

■

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\Gamma &= \iint_{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds \\ &= \iint_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{F}(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \, du \, dv \\ &= \iint_{\Omega} (-u, 0, -u - v) \cdot (1, 1, 1) \, du \, dv \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-u} (-2u - v) \, dv \, du \\ &= \int_0^1 \left( -2uv - \frac{v^2}{2} \right) \Big|_0^{1-u} \, du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (3u^2 - 2u - 1) \, du \\ &= \frac{1}{2} (u^3 - u^2 - u) \Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

■