

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

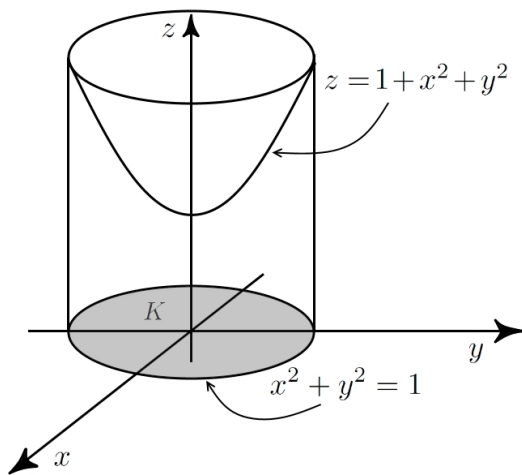
Prof. Edson

2º Semestre

Gabarito 2ª Prova
Data: 26 de Abril de 2017

2016
Turma E3

Exercício 1 Sabe-se que o domínio de integração é a região Ω delimitada pelas superfícies $z = 0$, $z = 1 + x^2 + y^2$ com $x^2 + y^2 \leq 1$. Realizando um esboço de Ω tem-se



Portanto, é possível expressar tal conjunto como

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 + x^2 + y^2 \\ (x, y) \in K \end{cases},$$

sendo

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Assim,

$$\begin{aligned} A &= \iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz \\ &= \iint_K \int_0^{1+x^2+y^2} z \sqrt{x^2 + y^2} dz dx dy \\ &= \iint_K \sqrt{x^2 + y^2} \frac{z^2}{2} \Big|_0^{1+x^2+y^2} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_K \sqrt{x^2 + y^2} (1 + x^2 + y^2)^2 dx dy \end{aligned}$$

Usando-se coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases},$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = r$$

O conjunto K neste referencial torna-se

$$K : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases},$$

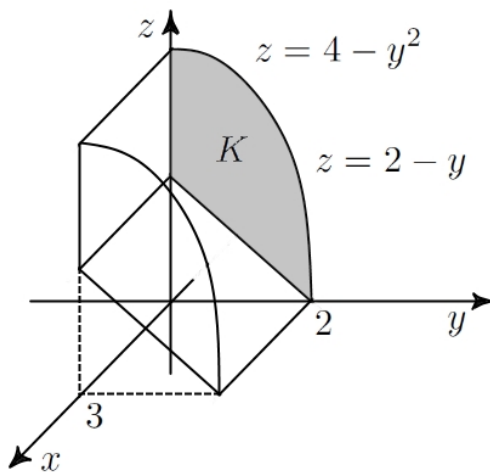
e disto, segue-se que

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \iint_K \sqrt{x^2 + y^2} (1 + x^2 + y^2)^2 dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2} (1 + r^2)^2 |J| dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 (1 + 2r^2 + r^4) dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 + 2r^4 + r^6) dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^3}{3} + \frac{2r^5}{5} + \frac{r^7}{7} \right) \Big|_0^1 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \frac{92}{105} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \frac{92}{105} \theta \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{92}{105} \pi \end{aligned}$$

■

Exercício 2 Realizando um esboço do sólido em

questão, obtém-se a seguinte figura



É possível descrever, este sólido da seguinte maneira

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ (y, z) \in K \end{cases},$$

sendo K descrito como

$$K : \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ 2 - y \leq z \leq 4 - y^2 \end{cases}.$$

Ou seja,

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ 2 - y \leq z \leq 4 - y^2 \end{cases}.$$

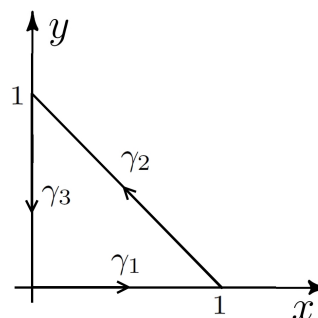
Portanto, o volume de Ω será dado por

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^2 \int_0^3 \int_{2-y}^{4-y^2} dz \, dx \, dy \\ &= \int_0^2 \int_0^3 z \Big|_{2-y}^{4-y^2} dx \, dy \\ &= \int_0^2 \int_0^3 (2 + y - y^2) dx \, dy \\ &= \int_0^2 (2 + y - y^2) x \Big|_0^3 dy \\ &= 3 \int_0^2 (2 + y - y^2) dy \\ &= 3 \left(2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= 3 \frac{10}{3} \\ &= 10 \end{aligned}$$

■

Exercício 3 Sabe-se que γ é a curva que corresponde à fronteira do triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ orientada no sentido anti-horário.



Uma possível parametrização para γ pode ser dada por

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

com

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x(t) = 1 - t \\ y(t) = t \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 1 - t \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

Observe que

$$\gamma_1'(t) = (1, 0)$$

$$\gamma_2'(t) = (-1, 1)$$

$$\gamma_3'(t) = (0, -1)$$

e

$$\|\gamma_1'(t)\| = 1$$

$$\|\gamma_2'(t)\| = \sqrt{2}$$

$$\|\gamma_3'(t)\| = 1$$

Chamando de A a integral que deseja-se calcular, tem-se que

$$\begin{aligned} A &= \int_{\gamma} (x + 4\sqrt{y}) d\gamma \\ &= \int_{\gamma_1} (x + 4\sqrt{y}) d\gamma + \int_{\gamma_2} (x + 4\sqrt{y}) d\gamma + \int_{\gamma_3} (x + 4\sqrt{y}) d\gamma \\ &= \int_0^1 (x(t) + 4\sqrt{y(t)}) \|\gamma_1'(t)\| dt + \\ &\quad + \int_0^1 (x(t) + 4\sqrt{y(t)}) \|\gamma_2'(t)\| dt + \\ &\quad + \int_0^1 (x(t) + 4\sqrt{y(t)}) \|\gamma_3'(t)\| dt \\ &= \int_0^1 t dt + \int_0^1 (1 - t + 4\sqrt{t}) \sqrt{2} dt + \int_0^1 (4\sqrt{1-t}) dt \\ &= \frac{t^2}{2} + \sqrt{2} \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{8}{3} \sqrt{t^3} \right) - \frac{8}{3} \sqrt{(1-t)^3} \Big|_0^1 \\ &= \frac{19}{6} (1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = r$$

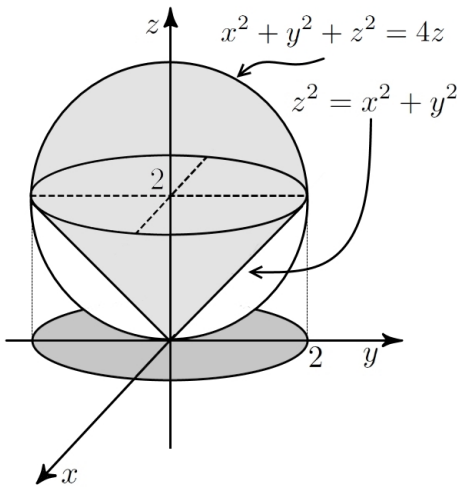
o conjunto Ω neste referencial torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ r \leq z \leq 2 + \sqrt{4-r^2} \end{cases}$$

Portanto, o volume deste sólido é dado por

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega_2} |J| dr d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^{2+\sqrt{4-r^2}} r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 rz \Big|_r^{2+\sqrt{4-r^2}} dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r (2 + \sqrt{4-r^2} - r) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (2r + r\sqrt{4-r^2} - r^2) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(r^2 - \frac{\sqrt{(4-r^2)^3}}{3} - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^2 d\theta \\ &= 4 \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 8\pi \end{aligned}$$

Exercício 4 Realizando um esboço do sólido em questão obtém-se a seguinte figura:



Ou seja, este sólido pode expresso da seguinte forma

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 + \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

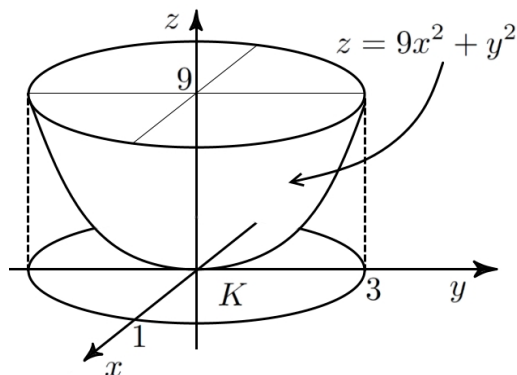
Usando coordenadas cilíndricas,

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases},$$

(Outro modo:) Observe que o sólido consiste da composição de uma meia esfera de raio 2 e um cone de base circular de raio 2 e altura 2. Ou seja, o volume deste sólido pode ser obtido da seguinte maneira

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \text{Vol(esfera)} + \text{Vol(cone)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3 + \frac{1}{3} \pi \cdot 2^2 \cdot 2 \\ &= \frac{24\pi}{3} \\ &= 8\pi \end{aligned}$$

Exercício 5 Realizando um esboço do sólido dado tem-se



Este sólido pode ser descrito como

$$\Omega : \begin{cases} 9x^2 + y^2 \leq z \leq 9 \\ (x, y) \in K \end{cases}$$

Sendo

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9x^2 + y^2 \leq 9\}$$

Usando coordenadas cilíndricas, ou seja

$$\begin{cases} x = \frac{r}{3} \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases},$$

cujos jacobiano é

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \frac{r}{3}$$

o conjunto Ω neste referencial torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ r^2 \leq z \leq 9 \end{cases}$$

Além disto, é dado que a densidade obedece

$$\delta(x, y, z) = \frac{k}{x^2 + y^2 + (z+1)^2}, \quad k \in \mathbb{R}$$

e a distância de um ponto qualquer (x, y, z) ao eixo z é dada por

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Assim

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} d^2 \delta \, dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_{\Omega} \frac{k(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + (z+1)^2} \, dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_{\Omega_2} \frac{k\left(\frac{r^2}{9} \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta\right)}{\frac{r^2}{9} \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta + (z+1)^2} |J| \, dr \, d\theta \, dz \\ &= \iiint_{\Omega_2} k \frac{r^2 \cos^2 \theta + 9r^2 \sin^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + 9r^2 \sin^2 \theta + 9(z+1)^2} \frac{r}{3} \, dr \, d\theta \, dz \\ &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^9 \frac{kr^3}{3} \frac{(\cos^2 \theta + 9\sin^2 \theta)}{r^2 \cos^2 \theta + 9r^2 \sin^2 \theta + 9(z+1)^2} \, dz \, d\theta \, dr \end{aligned}$$

■