Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

2^{o} Semestre

Gabarito 1ª Prova **2016**
Data: Sexta-feira, 10 de Março **Turma E3**

Exercício 1

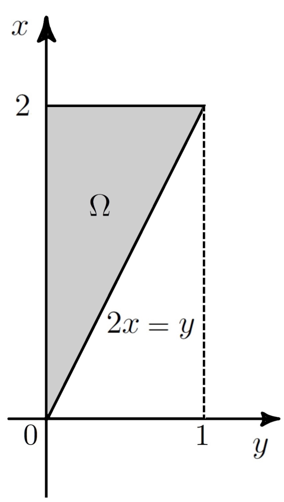
a). *Deseja-se calcular a seguinte integral*

$$A = \int_0^1 \int_{2x}^2 4e^{y^2}\, dy\, dx$$

Observe que o domínio de integração é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 2x \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Realizando um esboço deste conjunto, obtem-se a seguinte figura



Observe, no entanto que, o conjunto Ω também pode ser expresso como

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq \dfrac{y}{2} \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} A &= \iint_\Omega 4e^{y^2}\, dx\, dy \\ &= \int_0^2 \int_0^{\frac{y}{2}} 4e^{y^2}\, dx\, dy \\ &= \int_0^2 4e^{y^2} x \Big|_0^{\frac{y}{2}} dy \\ &= \int_0^2 4e^{y^2} \frac{y}{2} dy \\ &= e^{y^2} \Big|_0^2 \\ &= e^4 - 1 \end{aligned}$$

□

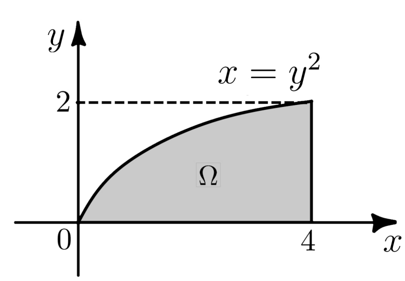
b). *Deseja-se calcular a integral*

$$B = \int_0^2 \int_{y^2}^4 \sqrt{x} \operatorname{sen} x\, dx\, dy$$

Esta integral iterada corresponde a uma integral dupla cujo domínio de integração é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} y^2 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Realizando um esboço deste conjunto tem-se a seguinte figura



Observe que o conjunto Ω pode também ser expresso como

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{x} \end{cases}$$

Portanto

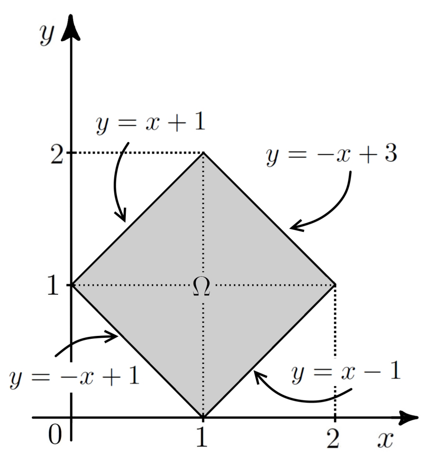
$$
\begin{aligned}
B &= \iint\limits_{\Omega} \sqrt{x}\operatorname{sen} x \, dx\, dy \\
&= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{x}\operatorname{sen} x \, dy\, dx \\
&= \int_0^4 \sqrt{x}\operatorname{sen} x \, y \Big|_0^{\sqrt{x}} dx \\
&= \int_0^4 x \operatorname{sen} x \, dx \\
&= (-x\cos x + \operatorname{sen} x) \Big|_0^4 \\
&= -4\cos 4 + \operatorname{sen} 4
\end{aligned}
$$

■

Exercício 2 *Deseja-se calcular a integral*

$$I = \iint\limits_{\Omega} (x+y)^2 \operatorname{sen}(x-y)\, dx\, dy$$

onde Ω *é o quadrado de vértices* $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$ *e* $(1,0)$, *cujo esboço é dado na figura abaixo*



Para isto, considere a seguinte mudança de variáveis

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

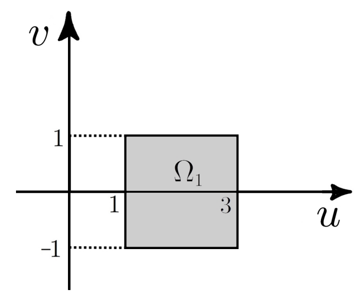
Segue-se disto que

$$\varphi : \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$$

e o jacobiano desta transformação é

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}.$$

Neste referencial o conjunto Ω *torna-se*



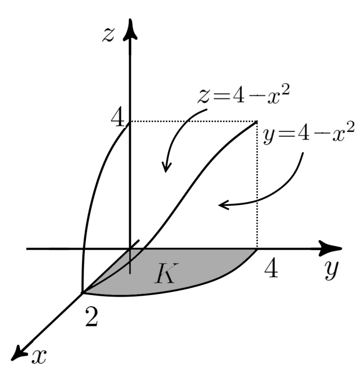
$$\Omega_1 : \begin{cases} 1 \le u \le 3 \\ -1 \le v \le 1 \end{cases}$$

Assim, segue-se que

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{\Omega} (x+y)^2 \operatorname{sen}(x-y)\, dx\, dy \\
&= \iint\limits_{\Omega_1} u^2 \operatorname{sen} v \; |J| \, du\, dv \\
&= \frac{1}{2}\int_1^3 \int_{-1}^1 u^2 \operatorname{sen} v \, dv\, du \\
&= \frac{1}{2}\int_1^3 -u^2 \cos v \Big|_{-1}^{1} du \\
&= -\frac{1}{2}\int_1^3 u^2 (\cos 1 - \cos(-1))\, du \\
&= 0
\end{aligned}
$$

■

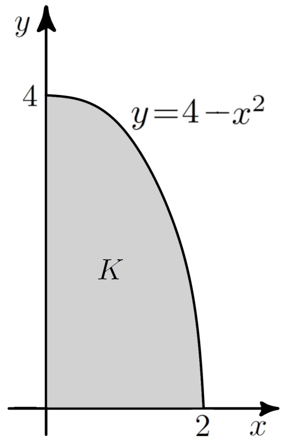
Exercício 3 *Traçando um esboço do sólido em questão, obtemos a seguinte figura*



Assim, o volume deste sólido é dado por

$$V = \iint\limits_K \left(4 - x^2\right) dx\, dy$$

sendo K o conjunto



$$K : \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 4 - x^2 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \left(4 - x^2\right) dy\, dx \\ &= \int_0^2 \left(4 - x^2\right) y \Big|_0^{4-x^2} dx \\ &= \int_0^2 \left(4 - x^2\right)^2 dx \\ &= \int_0^2 \left(16 - 8x^2 + x^4\right) dx \\ &= \left(16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right) \Big|_0^2 \\ &= \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right) \\ &= \frac{480 - 320 + 96}{15} \\ &= \frac{256}{15} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Considere*

$$A = \int_0^2 \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy\, dx + \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy\, dx$$

Usando-se as propriedades da integral dupla é possivel afirmar que

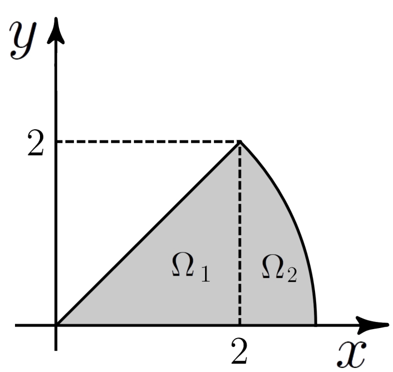
$$\begin{aligned} A &= \iint\limits_{\Omega_1} \sqrt{x^2 + y^2} dy\, dx + \\ &\quad + \iint\limits_{\Omega_2} \sqrt{x^2 + y^2} dy\, dx \\ &= \iint\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \sqrt{x^2 + y^2} dy\, dx \end{aligned}$$

Sendo

$$\Omega_1 : \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$$

$$\Omega_2 : \begin{cases} 2 \le x \le 2\sqrt{2} \\ 0 \le y \le \sqrt{8 - x^2} \end{cases}$$

Realizando um esboço destes conjuntos (num mesmo plano cartesiano), tem-se:



Usando-se coordenadas polares,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases},$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = r$$

O cojunto $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ neste referencial torna-se

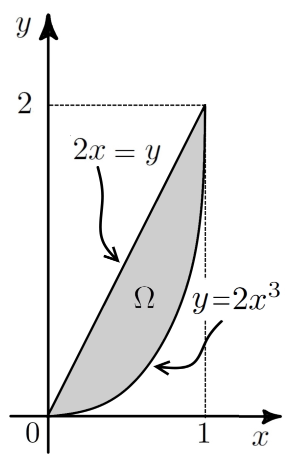
$$\bar{\Omega} : \begin{cases} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \\ 0 \le r \le 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
A &= \iint_{\bar{\Omega}} \sqrt{r^2}\,|J|\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta\,dr \\
&= \int_0^{2\sqrt{2}} r^2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} dr \\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^{2\sqrt{2}} r^2 dr \\
&= \frac{\pi}{4}\frac{r^3}{3}\Big|_0^{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}
\end{aligned}
$$

■

Exercício 5 *Realizando um esboço da lâmina em questão, tem-se*



Chamando de Ω *o conjunto que representa esta lâmina, segue-se que*

$$
\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 2x^3 \le y \le 2x \end{cases}
$$

e a massa desta lâmina é dada por

$$
M = \iint_{\Omega} \delta(x,y)dx\,dy
$$

sendo δ *a densidade da mesma. De acordo com o enunciado do problema,* $\delta(x,y)$ *é proporcional ao produto das distâncias de* (x,y) *aos eixos coordenados, ou seja*

$$
\delta(x,y) = kxy,\ k \in \mathbb{R}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
M &= \int_0^1 \int_{2x^3}^{2x} kxy\,dy\,dx \\
&= k\int_0^1 \frac{xy^2}{2}\Big|_{2x^3}^{2x} dx \\
&= \frac{k}{2}\int_0^1 x\left(4x^2 - 4x^6\right)dx \\
&= \frac{k}{2}\left(x^4 - \frac{1}{2}x^8\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{k}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_c &= \frac{1}{M}\iint_{\Omega} x\delta(x,y)dx\,dy \\
&= \frac{4}{k}\int_0^1 \int_{2x^3}^{2x} kx^2y\,dy\,dx \\
&= 4\int_0^1 \frac{x^2y^2}{2}\Big|_{2x^3}^{2x} dx \\
&= 2\int_0^1 x^2\left(4x^2 - 4x^6\right)dx \\
&= 2\left(\frac{4}{5}x^5 - \frac{4}{9}x^9\right)\Big|_0^1 \\
&= 2\left(\frac{4}{5} - \frac{4}{9}\right) \\
&= \frac{32}{45}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
y_c &= \frac{1}{M}\iint_{\Omega} y\delta(x,y)dx\,dy \\
&= \frac{4}{k}\int_0^1 \int_{2x^3}^{2x} kxy^2\,dy\,dx \\
&= 4\int_0^1 \frac{xy^3}{3}\Big|_{2x^3}^{2x} dx \\
&= \frac{4}{3}\int_0^1 x\left(8x^3 - 8x^9\right)dx \\
&= \frac{4}{3}\left(\frac{8}{5}x^5 - \frac{8}{11}x^{11}\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{64}{55}
\end{aligned}
$$

■