Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Profº. Edson

1º Semestre

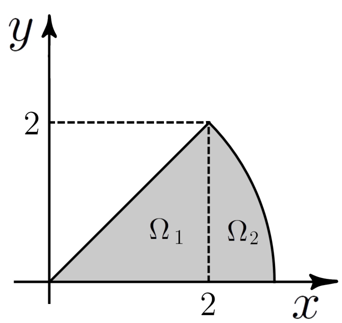
Gabarito Prova Final **2016**
Data: Segunda-feira, 5 de Setembro **Turma M3**

Exercício 1 *Observe que o domínio de integração é o conjunto* $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$*, sendo*

$$\Omega_1 : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$$

$$\Omega_2 : \begin{cases} 2 \leq x \leq 2\sqrt{2} \\ 0 \leq y \leq \sqrt{8 - x^2} \end{cases}$$

Realizando um esboço deste conjunto, obtemos a seguinte figura



Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left\| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right\| = r,$$

o conjunto Ω*, neste referencial, torna-se*

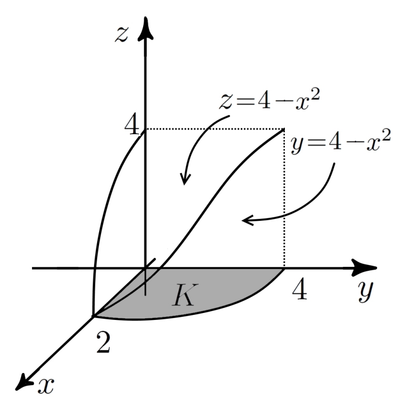
$$\bar{\Omega} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2\sqrt{2} \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy + \\ &+ \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \\ &= \iint_{\bar{\Omega}} r\,|J|\;dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\sqrt{2}} r^2 dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{2\sqrt{2}} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{16\sqrt{2}}{3} d\theta \\ &= \frac{4\sqrt{2}\pi}{3} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Realizando um esboço do sólido em questão, obtemos a seguinte figura*



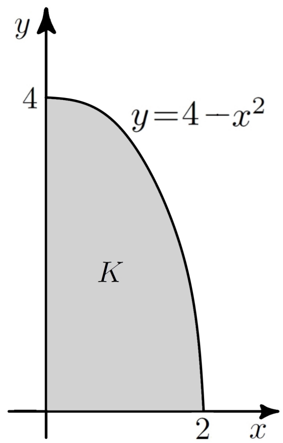
Percebe-se portanto, que tal sólido pode ser expresso como

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq z \leq 4 - x^2 \\ (x,y) \in K \end{cases}$$

Para calcular o volume deste sólido, é preciso resolver *a seguinte integral*

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} 1 dx\, dy\, dz \\ &= \iint_K \int_0^{4-x^2} z dz\, dx\, dy \\ &= \iint_K \left(4-x^2\right) dx\, dy \end{aligned}$$

Observe que



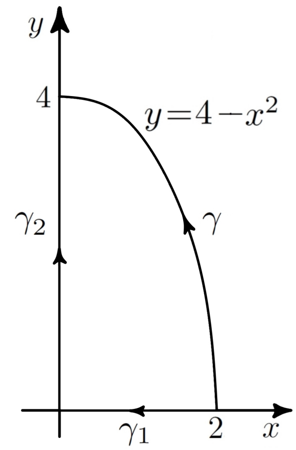
$$K : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 4-x^2 \end{cases},$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} V &= \iint_K \left(4-x^2\right) dx\, dy \\ &= \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \left(4-x^2\right) dy\, dx \\ &= \int_0^2 \left(4-x^2\right) \Big|_0^{4-x^2} dx \\ &= \int_0^2 \left(4-x^2\right)^2 dx \\ &= \int_0^2 \left(16-8x^2+x^4\right) dx \\ &= \frac{256}{15} \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Realizando um esboço da curva dada, obtem-se*



Observe que, sendo

$$\mathbf{F}(x,y) = 2xy\mathbf{i} + \left(x^2+y^2\right)\mathbf{j}$$

tem-se

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \frac{\partial\left(x^2+y^2\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(2xy\right)}{\partial y} \\ &= 2x-2x \\ &= 0 \\ \mathrm{Dom}_{\mathbf{F}} &= \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Ou seja, $\mathbf{F}$ *é um campo conservativo e portanto, a integral dada independe do caminho escolhido, importando apenas o ponto de início e término da curva. Considere assim a curva*

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

com

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = 2-t \\ y(t) = 0 \end{cases} ; \;\; 0 \leq t \leq 2$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \end{cases} ; \;\; 0 \leq t \leq 4$$

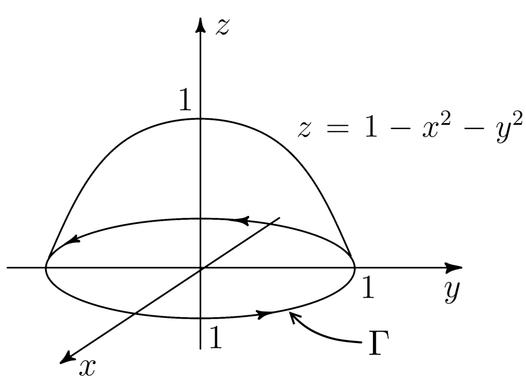
Assim, segue-se que

$$\begin{aligned} S &= \int_{\gamma} 2xydx + (x^2+y^2)dy \\ &= \int_{\gamma_1} 2xydx + (x^2+y^2)dy + \\ &+ \int_{\gamma_2} 2xydx + (x^2+y^2)dy \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^2 2(2-t)0(-dt) + \left[(2-t)^2 + 0^2\right]0 + \\
&+ \int_0^4 2\cdot 0\cdot t\cdot 0 + (0^2+t^2)dt \\
&= \int_0^4 t^2 dt \\
&= \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^4 \\
&= \frac{64}{3}
\end{aligned}
$$

■

Exercício 4 *Realizando um esboço da superfície em questão, obtem-se*



Uma parametrização possível para a curva Γ *é dada por*

$$
\Gamma : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} t \quad ; \quad 0 \le t \le 2\pi \\ z(t) = 0 \end{cases}
$$

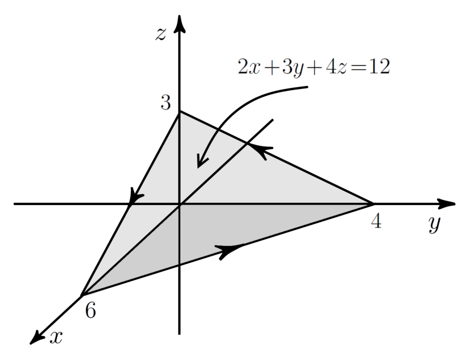
Portanto

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\Gamma &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\Gamma(t))\cdot\Gamma'(t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\cos t, \operatorname{sen} t, 0)\cdot(-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)dt \\
&= \int_0^{2\pi} (0, 2\cos t, \operatorname{sen}^2 t)\cdot(-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)dt \\
&= \int_0^{2\pi} 2\cos^2 t\, dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\Gamma &= \int_0^{2\pi} 2\frac{1+\cos 2t}{2}dt \\
&= \int_0^{2\pi} (1+\cos 2t)dt \\
&= t + \left.\frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right|_0^{2\pi} \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

■

Exercício 5 *Realizando um esboço do sólido dado, obtemos a seguinte imagem*



Como a fronteira deste sólido compreende uma superfície fechada, é possível aplicar o ***Teorema da Divergência de Gauss*** *para o cálculo do fluxo do campo vetorial*

$$
\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}
$$

através desta superfície. Ou seja

$$
\begin{aligned}
\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds &= \iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}dx\,dy\,dz \\
&= \iiint_\Omega (3x+1)dx\,dy\,dz
\end{aligned}
$$

sendo

$$
\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le 6 \\ 0 \le y \le \dfrac{12-2x}{3} \\ 0 \le z \le \dfrac{12-2x-3y}{4} \end{cases} ;
$$

Portanto,

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds = \int_0^6 \int_0^{\frac{12-2x}{3}} \int_0^{\frac{12-2x-3y}{4}} (3x+1)dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^6 \int_0^{\frac{12-2x}{3}} (3x+1)z\,\Big|_0^{\frac{12-2x-3y}{4}} dy\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^6 \int_0^{\frac{12-2x}{3}} (3x+1)(12-2x-3y)dy\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^6 \int_0^{\frac{12-2x}{3}} (12+34x-3y-9xy-6x^2)dydx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^6 \Big(12y+34xy-\frac{3}{2}y^2-\frac{9}{2}xy^2-$$

$$-6x^2y\Big)\,\Big|_0^{\frac{12-2x}{3}} dx$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^6 \left(3x^3-35x^2+96x+36\right)dx$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{3}{4}x^4-\frac{35}{3}x^3+48x^2+36x\right)\Big|_0^6$$

$$= 66 \qquad \blacksquare$$