Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 3$^{\text{a}}$ Prova **2016**
Data: Domingo, 4 de Setembro **Turma M3**

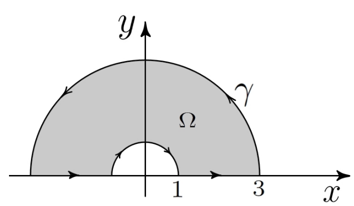
Exercício 1 *Desejamos calcular a integral*

$$A = \int_\gamma (\operatorname{arctg} x + y^2)dx + (e^y - x^2)dy$$

sendo γ a fronteira da região dada por

$$\Omega : \begin{cases} 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Realizando um esboço deste conjunto, obtemos a seguinte figura



Donde percebe-se que γ é uma curva fechada que, atende às condições do ***Teorema de Green****.*

Usando o ***Teorema de Green****, tem-se que*

$$\begin{aligned} A &= \int_\gamma (\operatorname{arctg} x + y^2)dx + (e^y - x^2)dy \\ &= \iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}(e^y - x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{arctg} x + y^2) \right] dx\,dy \\ &= \iint_\Omega (-2x - 2y)\,dx\,dy \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left\| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right\| = r,$$

o conjunto Ω, neste referencial, torna-se

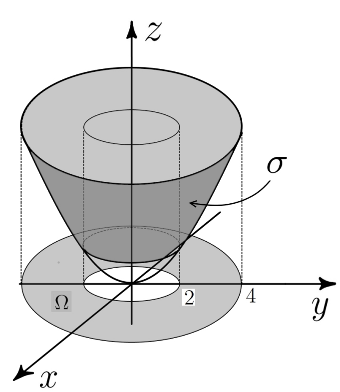
$$\Omega_2 : \begin{cases} 1 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} A &= -2\iint_{\Omega_2} (r\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta)\,|J|\,dr\,d\theta \\ &= -2\int_0^\pi \int_1^3 (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\,r^2 dr\,d\theta \\ &= -2\int_0^\pi (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\,\frac{r^3}{3}\Big|_1^3 d\theta \\ &= -\frac{52}{3}\int_0^\pi (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\,d\theta \\ &= -\frac{52}{3}\,(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)\,\Big|_0^\pi \\ &= -\frac{104}{3} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Realizando um esboço da região de superfície σ, tem-se a seguinte figura*



Uma parametrização possível para esta superfície, é dada por

$$\sigma : \begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = u^2 + v^2 \end{cases} ; \quad \underbrace{4 \leq u^2 + v^2 \leq 16}_{\Omega}$$

Diante disto, segue-se que

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = (1, 0, 2u)$$
$$\frac{\partial\sigma}{\partial v} = (0, 1, 2v)$$
$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} \times \frac{\partial\sigma}{\partial v} = (-2u, -2v, 1)$$
$$\left\| \frac{\partial\sigma}{\partial u} \times \frac{\partial\sigma}{\partial v} \right\| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\iint_\sigma \frac{xy}{z} ds &= \iint_\Omega \frac{uv}{u^2+v^2} \left\| \frac{\partial\sigma}{\partial u} \times \frac{\partial\sigma}{\partial v} \right\| dudv \\ &= \iint_\Omega \frac{uv}{u^2+v^2} \sqrt{4u^2+4v^2+1} dudv\end{aligned}$$

Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r \operatorname{sen}\theta \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left\| \frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)} \right\| = r,$$

o conjunto Ω*, neste referencial, torna-se*

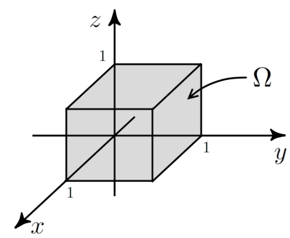
$$\Omega_2 : \begin{cases} 2 \leq r \leq 4 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\iint_\sigma \frac{xy}{z} ds &= \int_2^4 \int_0^{2\pi} \frac{r\cos\theta\, r \operatorname{sen}\theta}{r^2} \sqrt{4r^2+1}\, |J|\, d\theta\, dr \\ &= \int_2^4 \int_0^{2\pi} r\sqrt{4r^2+1} \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, dr \\ &= \int_2^4 r\sqrt{4r^2+1} \left(\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} dr \\ &= \int_2^4 0r\sqrt{4r^2+1} dr \\ &= 0\end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Desenhando o cubo em questão obtem-se*



Como trata-se de uma superfície fechada, pode-se usar o ***Teorema da Divergência de Gauss****, donde segue-se que o fluxo do campo vetorial*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 4xy\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$$

através da superfície σ *do cubo em questão é dado por*

$$\begin{aligned}\iint_\sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds &= \iiint_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F} dx\, dy\, dz \\ &= \iiint_\Omega \left[\frac{\partial(4xy)}{\partial x} + \frac{\partial(z^2)}{\partial y} + \frac{\partial(yz)}{\partial z} \right] dxdydz \\ &= \iiint_\Omega 5y dx\, dy\, dz\end{aligned}$$

Onde

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\iint_\sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 5y\, dy\, dx\, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 5\frac{y^2}{2} \Big|_0^1 dx\, dz \\ &= \frac{5}{2} \int_0^1 \int_0^1 dz\, dy \\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Como trata-se de uma superfície fechada, pode-se aplicar o* ***Teorema da Divergência de Gauss****, donde segue-se que*

$$\iint_\sigma \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iiint_\Omega \operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{F})\, dx\, dy\, dz$$

sendo Ω *o interior da superfície* σ*.*

Observe que, se

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, yz)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

Tem-se

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{F} &= \nabla\times\mathbf{F}\\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R \end{vmatrix}\\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\\
&\quad+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

e

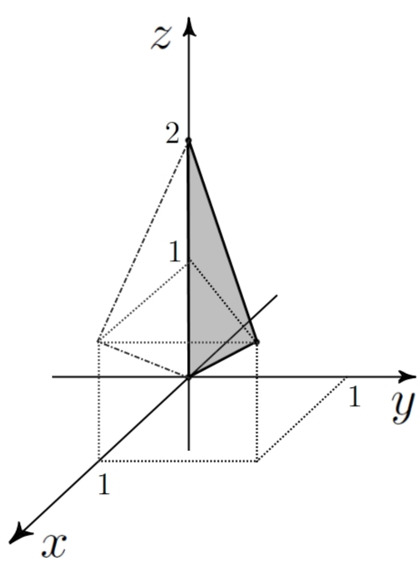
$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) &= \nabla\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F}\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\\
&= \frac{\partial R}{\partial x\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x\partial z}+\frac{\partial P}{\partial y\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y\partial x}+\\
&\quad+\frac{\partial Q}{\partial z\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z\partial y}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Desde que as funções P, Q e R sejam contínuas e deriváveis até segunda ordem. Com isto segue-se

$$\iint_\sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds = 0$$

Independente do campo vetorial $\mathbf{F}$. ■

Exercício 5 *Realizando um esboço do triângulo em questão, obtemos a seguinte imagem*



Um vez que a fronteira do triângulo dado determina um curva Γ fechada, segue-se que é possível a aplicação do Teorema de Stokes parao cálculo da integral em questão, ou seja

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\Gamma = \iint_\sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$$

onde σ compreende a superfície do triângulo, cuja parametrização pode ser dada por

$$\sigma:\begin{cases} x(u,v)=u\\ y(u,v)=u\\ z(u,v)=v\end{cases};(u,v)\in\Omega:\begin{cases}0\le u\le 1\\ u\le v\le 2-u\end{cases}$$

Disto, tem-se

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}=(1,1,0);$$
$$\frac{\partial\sigma}{\partial v}=(0,0,1);$$
$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}=(1,-1,0)$$

Além disto, sendo

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\mathbf{i}+\ln\sqrt{x^2+y^2}\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

tem-se

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{F} &= \nabla\times\mathbf{F}\\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) & \ln\sqrt{x^2+y^2} & 1 \end{vmatrix}\\
&= \left(0,0,\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\Gamma &= \iint_\sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds\\
&= \iint_\Omega \operatorname{rot}\mathbf{F}(\sigma(u,v))\cdot\frac{\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}}{\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\|}\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\|dudv\\
&= \iint_\Omega \operatorname{rot}\mathbf{F}(u,u,v)\cdot(1,-1,0)du\,dv\\
&= \iint_\Omega \left(0,0,\frac{2u}{\sqrt{u^2+u^2}}\right)\cdot(1,-1,0)du\,dv\\
&= \iint_\Omega 0du\,dv\\
&= 0
\end{aligned}$$

■