Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1º Semestre

Gabarito 2ª Prova **2016**
Data: Domingo, 7 de Agosto **Turma M3**

Exercício 1

a). *Desejamos calcular a integral*

$$A = \int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{2x+y} dz\,dx\,dy$$

Observe inicialmente que a integral dada por A pode ser reescrita da seguinte maneira

$$A = \iint_K \int_0^{2x+y} dz\,dx\,dy$$

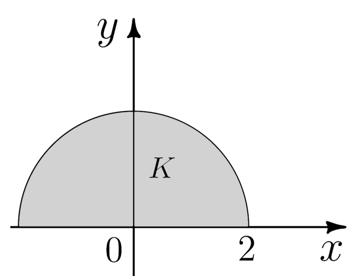
sendo

$$K : \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ -\sqrt{4-y^2} \le x \le \sqrt{4-y^2} \end{cases}$$

Ou seja

$$A = \iint_K (2x+y)dx\,dy$$

Realizando um esboço deste conjunto, obtemos a seguinte figura



e usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left\| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} \right\| = r,$$

o conjunto K, neste referencial, torna-se

$$K_2 : \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$$

Assim, a integral A, pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} A &= \iint_{K_2} |J|\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_0^2 r\left(2r\cos\theta + r\,\mathrm{sen}\,\theta\right) dr\,d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_0^2 \left(2\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta\right) r^2 dr\,d\theta \\ &= \int_0^\pi \left(2\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta\right) \frac{r^3}{3}\Bigg|_0^2 d\theta \\ &= \frac{8}{3}\int_0^\pi \left(2\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta\right) d\theta \\ &= \frac{8}{3}\left(2\mathrm{sen}\,\theta - \cos\theta\right)\Bigg|_0^\pi \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

□

b). *Desejamos agora calcular a integral*

$$B = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{4-x^2-y} x\,dz\,dy\,dx$$

Observe que

$$\begin{aligned} B &= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} xz\Bigg|_0^{4-x^2-y} dy\,dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} x\left(4 - x^2 - y\right) dy\,dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} \left(4x - x^3 - xy\right) dy\,dx \\ &= \int_0^1 \left(4xy - x^3y - \frac{1}{2}xy^2\right)\Bigg|_0^{1-x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^5 - 4x^3 + \frac{7}{2}x\right) dx \end{aligned}$$

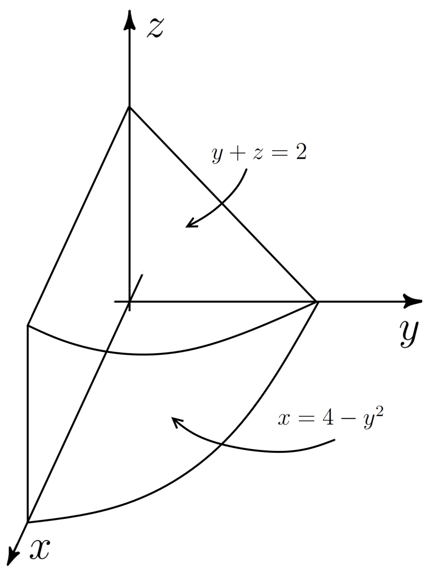
$$= \left(\frac{1}{12}x^6 - x^4 + \frac{7}{4}x^2\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{12} - 1 + \frac{7}{4}\right)$$

$$= \frac{5}{6}$$

■

Exercício 2 *Inicialmente precisamos realizar um esboço do sólido em questão, donde segue-se a seguinte figura*



Chamando de Ω *o conjunto que representa este sólido, observando a figura temos que sua descrição pode ser dada por*

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 - y^2 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 2 - y \end{cases}$$

Portanto, o volume procurado é dado pela seguinte integral

$$V = \int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{4-y^2} 1 dx\, dz\, dy$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2-y} x \Bigg|_0^{4-y^2} dz\, dy$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2-y} \left(4 - y^2\right) dz\, dy$$

$$= \int_0^2 \left(4 - y^2\right) z \Bigg|_0^{2-y} dy$$

$$= \int_0^2 \left(4 - y^2\right)(2 - y)\, dy$$

$$= \int_0^2 \left(y^3 - 2y^2 - 4y + 8\right) dy$$

$$= \left(\frac{1}{4}y^4 - \frac{2}{3}y^3 - 2y^2 + 8y\right)\Bigg|_0^2$$

$$= \frac{20}{3}$$

■

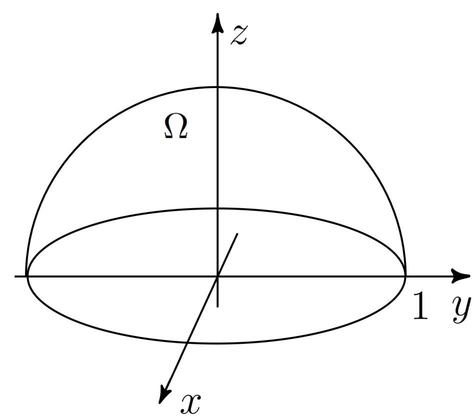
Exercício 3 *A distância de um ponto* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *qualquer ao eixo* z *é dada por*

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

E do enunciado tem-se que a densidade do sólido é homogênea, ou seja

$$\delta(x, y, z) = k,\ k \in \mathbb{R}$$

Traçando um esboço do sólido em questão, obtemos a seguinte figura



Assim, o momento de inércia deste sólido em relação ao eixo z *é dado pela seguinte integral*

$$I = \iiint_\Omega \delta(x, y, z) d^2(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_\Omega k\left(x^2 + y^2\right) dx\, dy\, dz$$

$$= k \iiint_\Omega \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy\, dz$$

Usando coordenadas esférica, ou seja

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left\| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} \right\| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$$

Neste referencial, o conjunto Ω *torna-se*

$$\Omega_1 : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Com isto, segue-se que

$$\begin{aligned} I &= k \iiint_{\Omega_1} \rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi \; |J| \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi \, \rho^2 \operatorname{sen}\varphi d\rho \, d\theta \, d\varphi \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho^4 \operatorname{sen}^3\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left. \frac{1}{5}\rho^5 \operatorname{sen}^3\varphi \right|_0^1 d\varphi \, d\theta \\ &= \frac{k}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3\varphi \, d\varphi \, d\theta \\ &= \frac{k}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}\varphi d\varphi \, d\theta \\ &= \frac{k}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos^2\varphi\right) \operatorname{sen}\varphi d\varphi \, d\theta \\ &= \frac{k}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{sen}\varphi - \cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi\right) d\varphi \, d\theta \\ &= \frac{k}{5} \int_0^{2\pi} \left. \left(-\cos\varphi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi\right) \right|_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \frac{k}{5} \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{2k}{15} 2\pi \\ &= \frac{4k\pi}{15} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Inicialmente devemos calcular a interseção entre as superfícies dadas para então parametrizar o resultado obtido. Devemos portanto resolver o seguinte sistema*

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 1 \\ x^2 + z^2 \;\; = 1 \end{cases}$$

Donde segue-se que

$$z = \pm 2y$$

Como devemos ter $y \geq 0$ *e* $z \geq 0$*, a solução será*

$$z = 2y$$

Uma parametrização que obedeça estas condições, pode ser

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \quad ; 0 \leq t \leq \pi \\ z = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

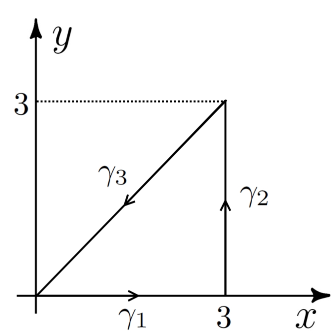
Assim, segue-se que

$$\begin{aligned} A &= \int_\gamma 2y dx + z dy + x dz \\ &= \int_0^\pi -\operatorname{sen}^2 t \, dt + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \cos t \, dt + \cos^2 t \, dt \\ &= \int_0^\pi \left(-1 + 2\cos^2 t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \cos t\right) dt \\ &= \int_0^\pi \left(\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \cos t\right) dt \\ &= \left. \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{4}\cos^2 t \right|_0^\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Exercício 5

a). *Considere a curva* γ *como união das curvas* γ_1, γ_2 *e* γ_3 *conforme esboçado na figura*



Uma parametrização possível para cada um dos trechos da curva γ pode ser dada, conforme está descrito abaixo:

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases} ;\ 0 \le t \le 3$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x(t) = 3 \\ y(t) = t \end{cases} ;\ 0 \le t \le 3$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} x(t) = 3 - t \\ y(t) = 3 - t \end{cases} ;\ 0 \le t \le 3$$

Sendo

$$F(x,y) = (y^2 - x^2)\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j}$$

Teremos,

$$\int_\gamma F \cdot d\gamma = \int_{\gamma_1} F \cdot d\gamma + \int_{\gamma_2} F \cdot d\gamma + \int_{\gamma_3} F \cdot d\gamma$$

$$= \int_0^3 F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)dt + \int_0^3 F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)dt$$

$$+ \int_0^3 F(\gamma_3(t)) \cdot \gamma_3'(t)dt$$

$$= \int_0^3 [F(t,0) \cdot (1,0) + F(3,t) \cdot (0,1) +$$

$$+ F(3-t, 3-t) \cdot (-1,-1)]\, dt$$

$$= \int_0^3 \big[(-t^2, t^2) \cdot (1,0) + (t^2 - 9, 9 + t^2) \cdot (0,1)$$

$$+ (0, 2(3-t)^2) \cdot (-1,-1)\big]\, dt$$

$$= \int_0^3 \left[-t^2 + 9 + t^2 - 2(3-t)^2\right] dt$$

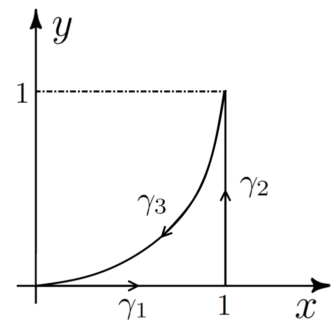
$$= \int_0^3 \left(-9 + 12t - 2t^2\right) dt$$

$$= \left(-9t + 6t^2 - \frac{2}{3}t^3\right) \Big|_0^3$$

$$= 9$$

□

b). *Procedendo de modo semelhante ao que foi feito no item anterior, considere a curva γ como união das curvas γ_1, γ_2 e γ_3 conforme esboçado na figura*



Uma parametrização possível para cada um dos trechos da curva γ pode ser dada, conforme está descrito abaixo:

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases} ;\ 0 \le t \le 1$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = t \end{cases} ;\ 0 \le t \le 1$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} x(t) = 1 - t \\ y(t) = (1-t)^3 \end{cases} ;\ 0 \le t \le 1$$

Sendo

$$F(x,y) = 2xy^3\mathbf{i} + 4x^2y^2\mathbf{j}$$

Teremos,

$$\int_\gamma F \cdot d\gamma = \int_{\gamma_1} F \cdot d\gamma + \int_{\gamma_2} F \cdot d\gamma + \int_{\gamma_3} F \cdot d\gamma$$

$$= \int_0^1 F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)dt + \int_0^1 F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)dt$$

$$+ \int_0^1 F(\gamma_3(t)) \cdot \gamma_3'(t)dt$$

$$= \int_0^1 [F(t,0) \cdot (1,0) + F(1,t) \cdot (0,1) +$$

$$+ F(1-t, (1-t)^3) \cdot (-1, -3(1-t)^2)]\, dt$$

$$= \int_0^1 \left[(0,0) \cdot (1,0) + (2t^3, 4t^2) \cdot (0,1) +\right.$$

$$\left. + (2(1-t)^{10}, 4(1-t)^8) \cdot (-1, -3(1-t)^2)\right] dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left[4t^2 - 2(1-t)^{10} - 12(1-t)^{10}\right] dt \\
&= \int_0^1 \left[4t^2 - 14(1-t)^{10}\right] dt \\
&= \left(\frac{4}{3}t^3 + \frac{14}{11}(1-t)^{11}\right) \Big|_0^1 \\
&= \frac{2}{33}
\end{aligned}
$$

■