Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 1ª Prova **2016**
Data: Quarta-feira, 8 de Março **Turma M3**

Exercício 1

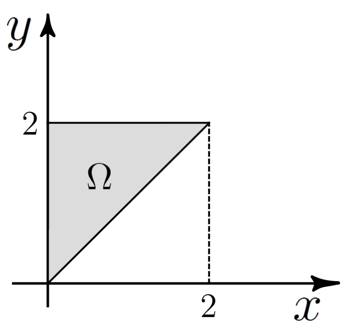
a). *Desejamos calcular a integral*

$$\int_0^2 \int_x^2 2y^2 \operatorname{sen}(xy)\, dy\, dx$$

Observe inicialmente que o domínio de integração desta integral é dado por

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Realizando um esboço deste conjunto, obtemos a seguinte figura



Observe, no entanto que, o conjunto Ω também pode ser expresso como

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^2\int_x^2 2y^2 \operatorname{sen}(xy)\, dy\, dx &= \int_0^2\int_0^y 2y^2 \operatorname{sen}(xy)\, dx\, dy \\
&= \int_0^2 -2y^2 \frac{\cos(xy)}{y} \Big|_0^y\, dy \\
&= \int_0^2 \left(2y - 2y\cos y^2\right) dy \\
&= \left(y^2 - \operatorname{sen} y^2\right) \Big|_0^2 \\
&= 4 - \operatorname{sen} 4
\end{aligned}$$

$\square$

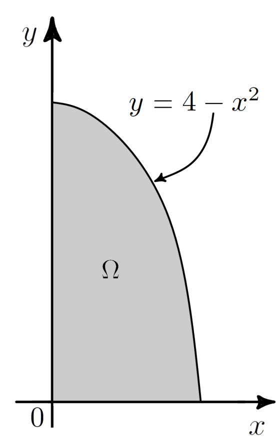
b). *Desejamos agora calcular a integral*

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\, dy\, dx$$

Observe que o domínio de integração, neste caso é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 4 - x^2 \end{cases}$$

Cujo esboço é dado pela seguinte figura



Observe que o conjunto Ω pode também ser descrito como

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{4-y} \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

Ou seja

$$\int_0^2\int_0^{4-x^2}\frac{xe^{2y}}{4-y}dy\,dx = \int_0^4\int_0^{\sqrt{4-y}}\frac{xe^{2y}}{4-y}dx\,dy$$

$$= \int_0^4 \frac{x^2e^{2y}}{2(4-y)}\Bigg|_0^{\sqrt{4-y}} dy$$

$$= \int_0^4 \frac{(4-y)e^{2y}}{2(4-y)}dx$$

$$= \int_0^4 \frac{e^{2y}}{2}dx$$

$$= \frac{e^{2y}}{4}\Bigg|_0^4$$

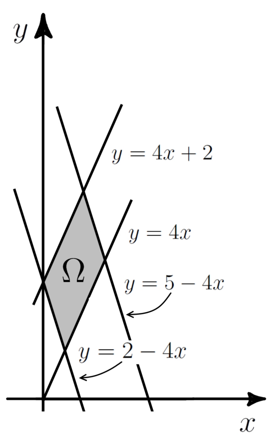
$$= \frac{e^8-1}{4}$$

■

Exercício 2 *Para calcularmos a integral*

$$A = \iint\limits_{\Omega}\frac{y-4x}{y+4x}dx\,dy$$

onde Ω *é a região delimitada pelas retas* $y = 4x$, $y = 4x+2$, $y = 2-4x$ *e* $y = 5-2x$, *devemos inicialmente traçar um esboço desta região. Teremos com isto, a seguinte figura*



Considere a seguinte mudança de variáveis

$$\varphi^{-1}: \begin{cases} u = y-4x \\ v = y+4x \end{cases}$$

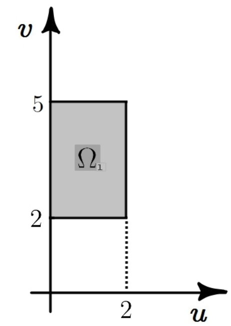
Segue-se disto que

$$\varphi: \begin{cases} x = \dfrac{-u+v}{8} \\ y = \dfrac{u+v}{2} \end{cases}$$

e, o jacobiano desta transformação será, portanto

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix} = \frac{1}{8}$$

e o conjunto Ω *neste referencial torna-se*



$$\Omega_1: \begin{cases} 0 \le u \le 2 \\ 2 \le v \le 5 \end{cases}$$

Assim, segue-se que

$$A = \iint\limits_{\Omega_1}\frac{u}{v}\,|J|\,du\,dv$$

$$= \int_2^5\int_0^2 \frac{u}{8v}du\,dv$$

$$= \int_2^5 \frac{u^2}{16v}\Bigg|_0^2 dv$$

$$= \int_2^5 \frac{dv}{4v}$$

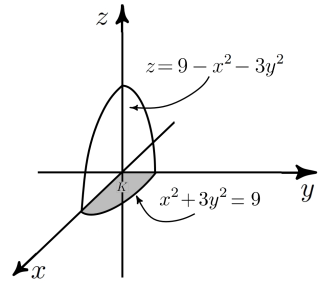
$$= \frac{\ln v}{4}\Bigg|_2^5$$

$$= \frac{\ln 5 - \ln 2}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{5}{2}$$

■

Exercício 3 *Traçando um esboço do sólido em questão, obtemos a seguinte figura*



Assim, o volume deste sólido é dado por

$$V = \iint\limits_K \left(9 - x^2 - 3y^2\right) dx\, dy$$

sendo

$$K = \left\{ (x,y) \,/ x^2 + 3y^2 \leq 9,\, x \geq 0, y \geq 0 \right\}$$

Considere a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = \dfrac{r}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

Neste referencial, o conjunto K torna-se

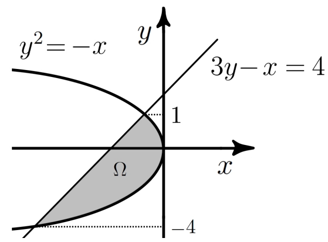
$$K_1 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_{K_1} \left(9 - r^2\right) |J|\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \left(9 - r^2\right) \frac{r}{\sqrt{3}} dr\, d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \left(9r - r^3\right) dr\, d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{9}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right) \Big|_0^3 d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{81}{4} d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{81}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \frac{81}{4\sqrt{3}} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{81\pi}{8\sqrt{3}} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Realizando um esboço da região dada no problema, obtemos a seguinte figura*



Observe que esta região, a qual denominaremos Ω, pode ser expressa como:

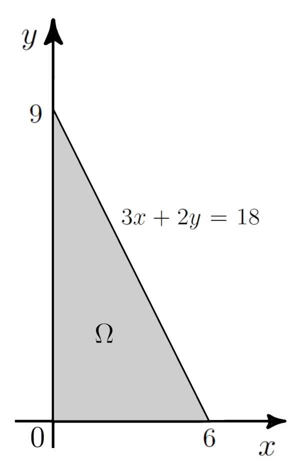
$$\Omega : \begin{cases} 3y - 4 \leq x \leq -y^2 \\ -4 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Assim

$$\begin{aligned} A(\Omega) &= \iint_\Omega 1 dx\, dy \\ &= \int_{-4}^1 \int_{3y-4}^{-y^2} dx\, dy \\ &= \int_{-4}^1 x \Big|_{3y-4}^{-y^2} dy \\ &= \int_{-4}^1 \left(-y^2 - 3y + 4\right) dy \\ &= \left(-\frac{1}{3}y^3 - \frac{3}{2}y^2 + 4y\right) \Big|_{-4}^1 \\ &= \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4\right) - \left(\frac{64}{3} - 24 - 16\right) \\ &= \frac{125}{6} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *A lâmina dada possui o seguinte formato*



Chamando de Ω o conjunto que representa esta lâmina, segue-se que

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 6 \\ 0 \leq y \leq \dfrac{18-3x}{2} \end{cases}$$

e a massa desta lâmina é dada por

$$M = \iint_\Omega \delta(x,y) dx\, dy$$

sendo δ a densidade da mesma. De acordo com o enunciado do problema, $\delta(x,y)$ é proporcional ao produto das distâncias de (x,y) aos eixos coordenados, ou seja

$$\delta(x,y) = kxy, \ k \in \mathbb{R}$$

Assim,

$$\begin{aligned} M &= \int_0^6 \int_0^{\frac{18-3x}{2}} kxy\, dy\, dx \\ &= k\int_0^6 \left. \frac{xy^2}{2} \right|_0^{\frac{18-3x}{2}} dx \\ &= k\int_0^6 2\,\frac{324x - 108x^2 + 9x^3}{8} dx \\ &= \frac{k}{8}\int_0^6 2\left(324x - 108x^2 + 9x^3\right) dx \\ &= \frac{k}{8}\left(162x^2 - 36x^3 + \frac{9}{4}x^4\right) \Bigg|_0^6 \\ &= \frac{k}{8}\left(5832 - 7776 + 2916\right) \\ &= \frac{243k}{2} \end{aligned}$$

■