

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

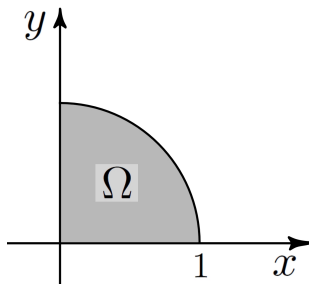
Prof. Edson

2º Semestre

Gabarito Prova Final
Data: Segunda-feira, 4 de Abril

2015
Turma A3

Exercício 1 Realizando um esboço da lâmina dada em questão, obtemos a seguinte figura



Sabendo que sua densidade em qualquer ponto é proporcional à distância deste ponto ao eixo x , ou seja

$$\delta(x, y) = ky, \quad k \in \mathbb{R}$$

Segue-se que a massa desta lâmina é dada por

$$\begin{aligned} M &= \iint_{\Omega} \delta(x, y) dx dy \\ &= k \iint_{\Omega} y dx dy \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares,

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = r$$

O conjunto Ω , neste referencial, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} M &= k \iint_{\Omega} y dx dy \\ &= k \iint_{\Omega_1} r \sin \theta |J| dr d\theta \\ &= k \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin \theta d\theta dr \\ &= k \int_0^1 -r^2 \cos \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dr \\ &= k \int_0^1 r^2 dr \\ &= k \frac{r^3}{3} \Big|_0^1 \\ &= \frac{k}{3} \end{aligned}$$

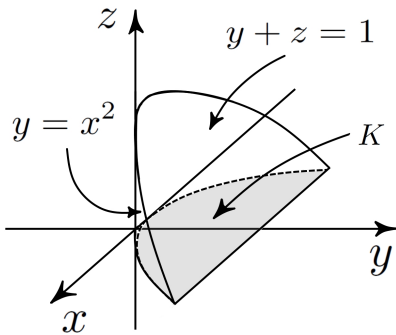
Além disto, seu centro de massa será o ponto (x_c, y_c) onde

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{M} \iint_{\Omega} x \delta(x, y) dx dy \\ &= \frac{3}{k} \iint_{\Omega_1} r \cos \theta k r \sin \theta |J| dr d\theta \\ &= 3 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos \theta \sin \theta d\theta dr \\ &= 3 \int_0^1 r^3 \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dr \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 r^3 dr \\ &= \frac{3}{2} \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 y_c &= \frac{1}{M} \iint_{\Omega} y \delta(x, y) dx dy \\
 &= \frac{3}{k} \iint_{\Omega_1} r \sin \theta k r \sin \theta |J| dr d\theta \\
 &= 3 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin^2 \theta d\theta dr \\
 &= 3 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta dr \\
 &= \frac{3}{2} \int_0^1 r^3 \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dr \\
 &= \frac{3\pi}{4} \int_0^1 r^3 dr \\
 &= \frac{3\pi}{4} \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 \\
 &= \frac{3\pi}{16}
 \end{aligned}$$

Exercício 2 Realizando um esboço do sólido em questão, o qual denominaremos de Ω , obtemos a seguinte figura



O volume de Ω é dado pela seguinte integral

$$V = \iint_K (1 - y) dx dy$$

sendo

$$K : \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Ou seja

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 (1 - y) dy dx \\
 &= \int_{-1}^1 \left(y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^1 dx \\
 &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2} \right) dx \\
 &= \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} \right) \Big|_{-1}^1 \\
 &= \frac{8}{15}
 \end{aligned}$$

Exercício 3 Observe inicialmente que deseja-se calcular uma integral de linha do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (1 - ye^{-x}) \mathbf{i} + e^{-x} \mathbf{j}$$

e que

$$\begin{aligned}
 \text{rot } \mathbf{F}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (e^{-x}) - \frac{\partial}{\partial y} (1 - ye^{-x}) \\
 &= -e^{-x} + e^{-x} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Logo, como $D_{\mathbf{F}} = \mathbb{R}^2$, que é simplesmente conexo, a integral em questão é independente do caminho escolhido, importando apenas os pontos de início e fim do caminho, que neste caso são

$$A = (0, 1) \text{ e } B = (1, 2)$$

Escolhendo o segmento de reta que começa em A e termina em B, cuja parametrização é dada por

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 + t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

e considerando

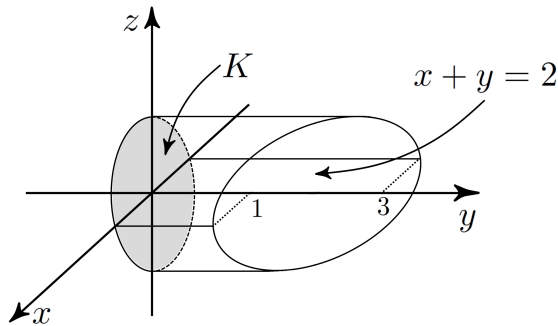
$$I = \int_{\gamma} (1 - ye^{-x}) dx + e^{-x} dy$$

Temos que

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\gamma_1} (1 - ye^{-x}) dx + e^{-x} dy \\
 &= \int_0^1 [1 - (1+t)e^{-t}] dt + e^{-t} dt \\
 &= \int_0^1 (1 - e^{-t} - te^{-t} + e^{-t}) dt \\
 &= \int_0^1 (1 - te^{-t}) dt \\
 &= [t + e^{-t}(t+1)] \Big|_0^1 \\
 &= \frac{2}{e}
 \end{aligned}$$

■

Exercício 4 Realizando um esboço do sólido dado em questão, o qual chamaremos de Ω , obtemos a seguinte figura



O fluxo de $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ através da superfície σ que corresponde à fronteira deste sólido é dado por

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$$

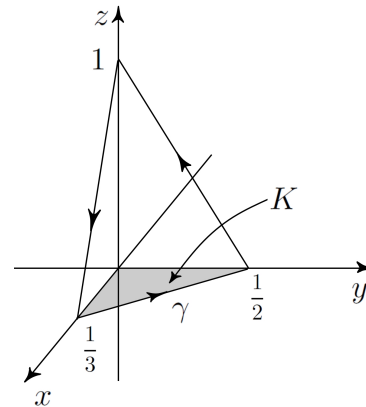
sendo \mathbf{n} o vetor normal externo à superfície. Entretanto, por tratar-se de uma superfície fechada, o Teorema da Divergência de Gauss, nos garante

que

$$\begin{aligned}
 \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz \\
 &= \iiint_{\Omega} 2 dx dy dz \\
 &= 2 \iiint_{\Omega} dx dy dz \\
 &= 2 \operatorname{Vol}(\Omega) \\
 &= 4\pi
 \end{aligned}$$

■

Exercício 5 Desenhando a região em questão teremos a seguinte figura



Como trata-se de uma curva fechada, o Teorema de Stokes nos garante que

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma = \iint_{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$$

onde

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1 & x + yz & xy - \sqrt{z} \end{vmatrix} \\
 &= (x - y)\mathbf{i} - y\mathbf{j} + \mathbf{k}
 \end{aligned}$$

e uma possível parametrização para a superfície σ é dada por

$$\sigma : \begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = 1 - 3u - 2v \end{cases} \quad (u,v) \in K$$

com

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = (1, 0, -3)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = (0, 1, -2)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = (3, 2, 1)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F \cdot d\gamma &= \iint_{\sigma} (u - v, -v, 1) \cdot \frac{(3, 2, 1)}{\|(3, 2, 1)\|} ds \\ &= \iint_K (3u - 3v - 2v + 1) du dv \end{aligned}$$

Observe que

$$K : \begin{cases} 0 \leq u \leq \frac{1}{3} \\ 0 \leq v \leq \frac{1-3u}{2} \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F \cdot d\gamma &= \int_0^{\frac{1}{3}} \int_0^{\frac{1-3u}{2}} (3u - 5v + 1) dv du \\ &= \int_0^{\frac{1}{3}} \left(3uv - \frac{5}{2}v^2 + v \right) \Big|_0^{\frac{1-3u}{2}} du \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{1}{3}} (-81u^2 + 30u - 1) du \\ &= \frac{1}{8} (-27u^3 + 15u^2 - u) \Big|_0^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{24} \end{aligned}$$

■