

Universidade Federal do Vale do São Francisco  
Engenharia Civil  
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof<sup>o</sup>. Edson

2<sup>o</sup> Semestre

Gabarito 3<sup>a</sup> Prova  
Data: Segunda-feira, 28 de Março

2015  
Turma A3

**Exercício 1** Inicialmente observemos que

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + y & y^2 + x & ze^z \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Assim, como  $D_{\mathbf{F}} = \mathbb{R}^3$ , que é simplesmente conexo, e  $\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{0}$ , segue-se que  $\mathbf{F}$  é um campo vetorial conservativo. Podemos portanto, escolher qualquer caminho que preserve os pontos inicial e final do caminho dado no problema.

Conforme o enunciado, o ponto inicial é o ponto  $A = (1, 0, 0)$  e o ponto final é o ponto  $B = (1, 0, 1)$ . O segmento de reta que começa em  $A$  e termina em  $B$ , pode ser parametrizado da seguinte forma

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = t \end{cases} ; 0 \leq t \leq 1$$

Assim, o trabalho que se deseja calcular é dado por

$$\begin{aligned} \tau &= \int_{\gamma} \mathbf{F} d\gamma \\ &= \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^1 \mathbf{F}(1, 0, t) \cdot (0, 0, 1) dt \\ &= \int_0^1 (1, 1, te^t) \cdot (0, 0, 1) dt \\ &= \int_0^1 te^t dt \\ &= e^t(t-1) \Big|_0^1 \\ &= 0 - (-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

**Exercício 2**

a). Considere

$$A = \oint_{\gamma} (6y + x) dx + (y + 2x) dy$$

Como o caminho sobre o qual deseja-se calcular a integral trata-se de uma curva fechada e o campo vetorial dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = (6y + x)\mathbf{i} + (y + 2x)\mathbf{j}$$

está definido para todos os  $(x, y)$  no interior da curva dada, segue-se do **Teorema de Green** que

$$\begin{aligned} A &= \iint_{\hat{\gamma}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (y + 2x) - \frac{\partial}{\partial y} (6y + x) \right] dx dy \\ &= \iint_{\hat{\gamma}} (2 - 6) dx dy \\ &= -4 \iint_{\hat{\gamma}} dx dy \\ &= -4 \text{Área}(\hat{\gamma}) \end{aligned}$$

Sendo  $\hat{\gamma}$  o interior da curva  $\gamma$ . Observe que, sendo  $\gamma$  a curva cujo traço esta sobre a equação

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

é, na verdade uma circunferência de raio 2 e centro no ponto  $(2, 3)$ . Assim

$$\text{Área}(\hat{\gamma}) = \pi(2)^2 = 4\pi$$

e disto segue-se que

$$A = -4 \text{Área}(\hat{\gamma}) = -16\pi$$

□

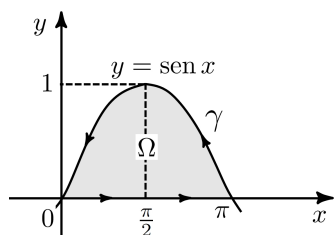
b). Considere agora

$$B = \oint_{\gamma} 3y dx + 2x dy$$

Usando novamente o **Teorema de Green**, temos que

$$\begin{aligned} B &= \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (2x) - \frac{\partial}{\partial y} (3y) \right] dx dy \\ &= \iint_{\Omega} (2 - 3) dx dy \\ &= - \iint_{\Omega} dx dy \\ &= -\text{Área}(\Omega) \end{aligned}$$

Onde  $\Omega$  é o interior da curva  $\gamma$ . Observe que um esboço possível para esta curva pode ser dado pela figura abaixo



Assim,

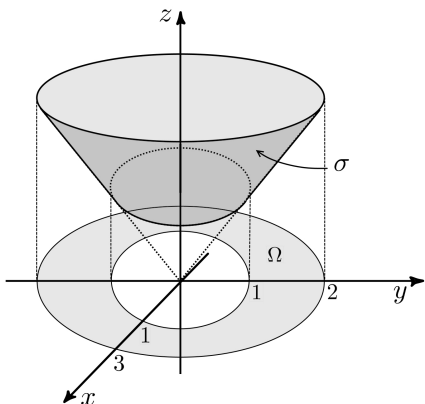
$$\begin{aligned} \text{Área}(\Omega) &= \int_0^{\pi} \text{sen } x dx \\ &= -\cos x \Big|_0^{\pi} \\ &= -\cos \pi + \cos 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Logo,

$$B = -\text{Área}(\Omega) = -2$$

■

**Exercício 3** Realizando um esboço da porção de superfície em questão



Uma parametrização possível para esta superfície é dada por

$$\sigma : \begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2} \end{cases}, (u, v) \in \Omega$$

Donde segue-se que,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \left( 1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left( 0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left( \frac{-u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, 1 \right)$$

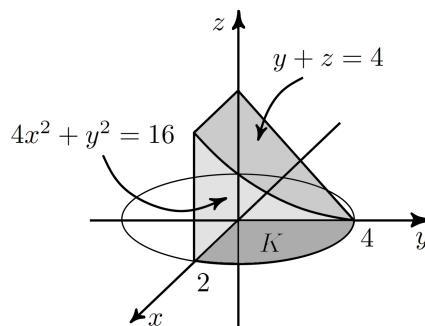
$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| = \sqrt{2}$$

e a área procurada é dado por

$$\begin{aligned} A &= \iint_{\sigma} 1 ds \\ &= \iint_{\Omega} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du dv \\ &= \iint_{\Omega} \sqrt{2} du dv \\ &= \sqrt{2} \iint_{\Omega} du dv \\ &= \sqrt{2} \text{Área}(\Omega) \\ &= \sqrt{2} (\text{Área}(\text{elipse}) - \text{Área}(\text{círculo})) \\ &= \sqrt{2} (\pi \cdot 2 \cdot 3 - \pi \cdot 1^2) \\ &= 5\sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

■

**Exercício 4** Realizando um esboço do sólido em questão, o qual denominaremos de  $\Omega$ , obtemos a seguinte figura



Usando o Teorema da Divergência de Gauss, teremos

$$\begin{aligned}\iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} (2z - x - 2z) dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} -x dx dy dz\end{aligned}$$

Sendo

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq z \leq 4 - y \\ (x, y) \in K \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds &= \iint_K \int_0^{4-y} -x dz dx dy \\ &= \iint_K -xz \Big|_0^{4-y} dx dy \\ &= \iint_K -x(4-y) dx dy\end{aligned}$$

Usando as coordenadas

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \frac{1}{2}r$$

O conjunto  $K$ , neste referencial, torna-se

$$K_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 4 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

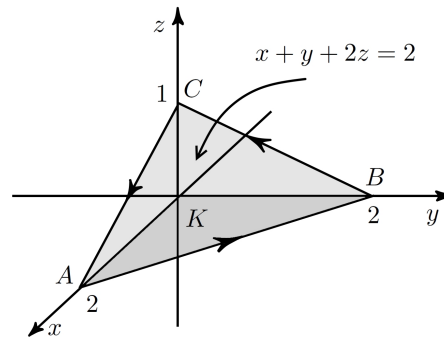
Portanto,

$$\begin{aligned}\iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds &= \iint_K -x(4-y) dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 -\frac{1}{2}r \cos \theta (4 - r \sin \theta) |J| dr d\theta \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 (4r^2 \cos \theta - r^3 \sin \theta \cos \theta) dr d\theta \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{4}{3}r^3 \cos \theta - \frac{1}{4}r^4 \sin \theta \cos \theta \right]_0^4 d\theta \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{256}{3} \cos \theta - \frac{256}{4} \sin \theta \cos \theta \right) d\theta \\ &= -\frac{1}{4} \left( \frac{256}{3} \sin \theta - \frac{256}{4} \frac{\sin^2 \theta}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{40}{3}\end{aligned}$$

■

**Exercício 5** Inicialmente necessitamos descobrir a equação do plano que contém o triângulo de vértices  $A = (2, 0, 0)$ ,  $B = (0, 2, 0)$  e  $C = (0, 0, 1)$ . Para isto, observe que o vetor normal deste plano é dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= (B - A) \times (C - A) \\ &= (-2, 2, 0) \times (0, -2, 1) \\ &= (2, 2, 4)\end{aligned}$$



O plano que passa pelo ponto  $A$  e possui  $\mathbf{n}$  como vetor normal é dado por

$$\begin{aligned}[(x, y, z) - A] \cdot \mathbf{n} &= 0 \Leftrightarrow \\ [(x, y, z) - (2, 0, 0)] \cdot (2, 2, 4) &= 0 \Leftrightarrow \\ x + y + 2z &= 2\end{aligned}$$

Uma parametrização possível para a porção deste plano delimitada pelos vértices  $A, B$  e  $C$ , pode ser dada

por

$$\sigma : \begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = \frac{2 - u - v}{2} \end{cases} ; (u, v) \in K$$

Donde segue-se que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \left( 1, 0, -\frac{1}{2} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left( 0, 1, -\frac{1}{2} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right)$$

Observe agora que

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y - x & x - z & x - y \end{vmatrix} \\ &= (0, -1, 0) \end{aligned}$$

E usando o **Teorema de Stokes**, teremos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma &= \iint_{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds \\ &= \iint_K (0, -1, 0) \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)}{\left\|\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)\right\|} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \, du \, dv \\ &= -\frac{1}{2} \iint_K \, du \, dv \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{Área}(K) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

■