

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Edson

2º Semestre

Gabarito 2ª Prova
Data: Domingo, 9 de Setembro

2015
Turma A3

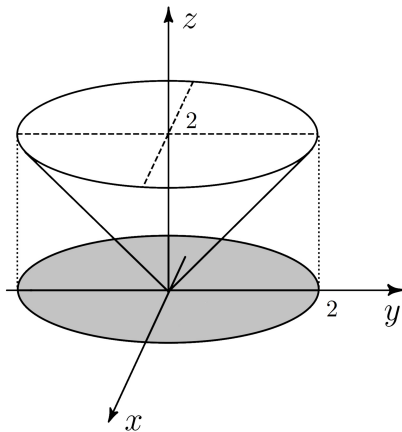
Exercício 1 Desejamos calcular a integral

$$A = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 xz \, dz \, dx \, dy$$

Para isto, observemos inicialmente que o domínio de integração desta integral é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} -2 \leq y \leq 2 \\ -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2} \\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2 \end{cases}$$

cujo desenho é esboçado na figura abaixo



Usando coordenadas cilíndricas,

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = r$$

O conjunto Ω , neste referencial, torna-se,

$$\Omega_1 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ r \leq z \leq 2 \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_r^2 r \cos \theta \, z \, |J| \, dz \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^2 \cos \theta \left. \frac{z^2}{2} \right|_r^2 d\theta \, dr \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} \cos \theta (4 - r^2) \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^2 -\frac{r^2}{2} (4 - r^2) \sin \theta \Big|_0^{2\pi} dr \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

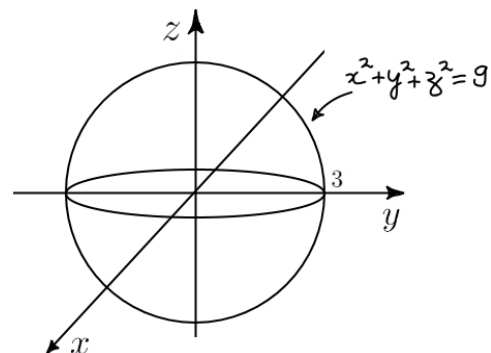
Exercício 2 Desejamos agora, calcular a integral

$$B = \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \, dz \, dx \, dy$$

Como fizemos no item anterior, observemos que o domínio de integração desta integral é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} -3 \leq y \leq 3 \\ -\sqrt{9-y^2} \leq x \leq \sqrt{9-y^2} \\ -\sqrt{9-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{9-x^2-y^2} \end{cases}$$

cujo desenho é esboçado na figura abaixo



Usando coordenadas esféricas,

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} \right| = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi$$

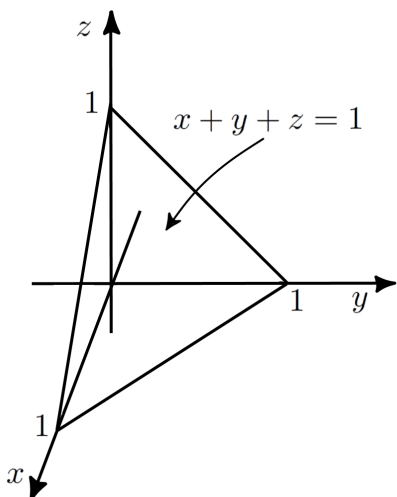
O conjunto Ω , neste referencial, torna-se,

$$\Omega_1 : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 3 \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} B &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^3 \rho \rho^2 \operatorname{sen} \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho^4}{4} \operatorname{sen} \varphi \Big|_0^3 \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{81}{4} \operatorname{sen} \varphi \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_0^\pi \frac{81}{4} \operatorname{sen} \varphi \theta \Big|_0^{2\pi} \, d\varphi \\ &= 2\pi \frac{81}{4} \int_0^\pi \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi \\ &= -\frac{81\pi}{2} \cos \varphi \Big|_0^\pi \\ &= -\frac{81\pi}{2} (-1 - 1) \\ &= 81\pi \end{aligned}$$

Exercício 3 Realizando um esboço do tetraedro em questão



Assim, o conjunto Ω pode ser descrito como

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \\ 0 \leq z \leq 1 - x - y \end{cases}$$

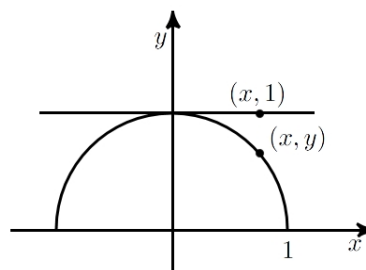
Portanto,

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} x^2 dV &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x^2 dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 z \Big|_0^{1-x-y} dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 (1-x-y) dy dx \\ &= \int_0^1 x^2 \left(y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 x^2 \left(1-x - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx \\ &= \frac{1}{60} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 De acordo com o enunciado deste problema a densidade linear do arame é dada por

$$\delta(x, y) = k |y - 1|, \quad k \in \mathbb{R}$$



Como pode ser visto no esboço do gráfico que representa o arame, todos os pontos (x, y) do arame estão abaixo da reta $y = 1$. Portanto, para estes pontos $y \leq 1$ e

$$\delta(x, y) = k(1 - y), \quad k \in \mathbb{R}$$

A massa deste arame é dada por

$$M = \int_{\gamma} \delta(x, y) ds$$

onde

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} ; 0 \leq t \leq \pi$$

Portanto,

$$\begin{aligned} M &= \int_{\gamma} k(1-y) ds \\ &= k \int_0^{\pi} (1 - \sin t) \|\gamma'(t)\| dt \\ &= k \int_0^{\pi} (1 - \sin t) \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt \\ &= k(t + \cos t) \Big|_0^{\pi} \\ &= k(\pi - 1 - 0 - 1) \\ &= k(\pi - 2) \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{M} \int_{\gamma} x \delta(x, y) ds \\ &= \frac{1}{k(\pi - 2)} \int_0^{\pi} \cos t \cdot k(1 - \sin t) \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \frac{k}{k(\pi - 2)} \int_0^{\pi} \cos t(1 - \sin t) dt \\ &= \frac{1}{\pi - 2} \int_0^{\pi} (\cos t - \cos t \sin t) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{1}{M} \int_{\gamma} y \delta(x, y) ds \\ &= \frac{1}{k(\pi - 2)} \int_0^{\pi} \sin t \cdot k(1 - \sin t) \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \frac{k}{k(\pi - 2)} \int_0^{\pi} \sin t(1 - \sin t) dt \\ &= \frac{4 - \pi}{2\pi - 4} \end{aligned}$$

Exercício 5

a). Sendo

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} \end{cases} ; 0 \leq t \leq 3$$

temos

$$\gamma'(t) = (1, \sqrt{t})$$

e

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+t}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{1+x} ds &= \int_0^3 \frac{1}{1+t} \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_0^3 \frac{\sqrt{1+t}}{1+t} dt \\ &= \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} \\ &= \int_1^4 \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= 2u^{\frac{1}{2}} \Big|_1^4 \\ &= 2(2-1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

□

b) Sendo

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \\ z(t) = t \end{cases} ; 0 \leq t \leq 2\pi$$

temos

$$\gamma'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t, 1)$$

e

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{5}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{e^{-z}}{x^2 + y^2} ds &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{-t}}{4} \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \frac{\sqrt{5}}{4} \int_0^{2\pi} e^{-t} dt \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{4} e^{-t} \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{4} (1 - e^{-2\pi}) \end{aligned}$$

■