

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Edson

2º Semestre

Gabarito 1ª Prova
Data: Terça-feira, 23 de Fevereiro

2015
Turma A3

Exercício 1

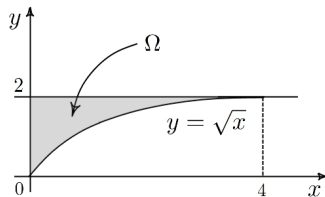
a). Desejamos calcular a integral

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \text{sen}(\pi y^3) dy dx$$

Para o cálculo desta integral, procederemos com a inversão da ordem de integração. Para isto, precisamos inicialmente desenhar o conjunto onde desejamos efetuar esta integral. Chamando de Ω este conjunto, temos

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{x} \leq y \leq 2 \end{cases}$$

cujo desenho é esboçado na figura abaixo



Observe porém, que o conjunto Ω pode também ser descrito da seguinte maneira

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq y^2 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \text{sen}(\pi y^3) dy dx &= \int_0^2 \int_0^{y^2} \text{sen}(\pi y^3) dx dy \\ &= \int_0^2 \text{sen}(\pi y^3) x \Big|_0^{y^2} dy \\ &= \int_0^2 y^2 \text{sen}(\pi y^3) dy \end{aligned}$$

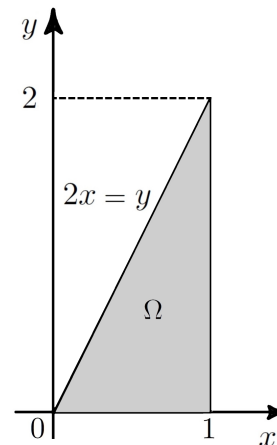
$$\begin{aligned} &= -\frac{\cos(\pi y^3)}{3\pi} \Big|_0^2 \\ &= -\frac{\cos(8\pi)}{3\pi} + \frac{\cos(0)}{3\pi} \\ &= -\frac{1}{3\pi} + \frac{1}{3\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

b). Procedendo da mesma maneira como no item anterior, temos

$$\Omega : \begin{cases} \frac{y}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

cujo esboço é dado pela seguinte figura



O conjunto Ω pode também ser descrito como

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2x \end{cases}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 \cos(x^2) dx dy &= \int_0^1 \int_0^{2x} \cos(x^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \cos(x^2) y \Big|_0^{2x} dx \\ &= \int_0^1 2x \cos(x^2) dx \\ &= \operatorname{sen}(x^2) \Big|_0^1 \\ &= \operatorname{sen} 1 \end{aligned}$$

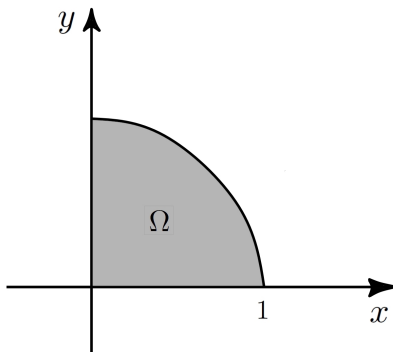
Exercício 2 Desejamos calcular a integral

$$A = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$$

Cujo conjunto de integração é dado por

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

e esboçado pela seguinte figura



Usando coordenadas polares,

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

cujos jacobiano é dado por

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = r$$

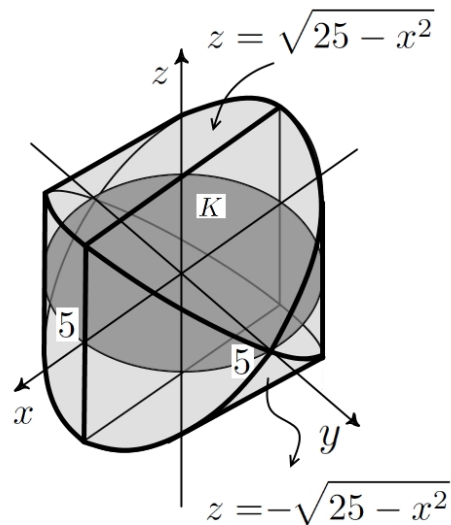
o conjunto Ω , neste referencial, torna-se

$$\Omega_1 : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

Assim, segue-se que

$$\begin{aligned} A &= \iint_{\Omega_1} \sqrt{1-r^2} |J| dr d\theta \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sqrt{1-r^2} d\theta dr \\ &= \int_0^1 r \sqrt{1-r^2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dr \\ &= \int_0^1 \frac{\pi}{2} r \sqrt{1-r^2} dr \\ &= -\frac{\pi}{4} \int_1^0 \sqrt{u} du \\ &= -\frac{\pi}{4} \frac{2}{3} \sqrt{u^3} \Big|_1^0 \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Exercício 3 Observe que o sólido dado, possui o seguinte esboço



Chamando de Ω o conjunto que representa este sólido, podemos expressá-lo da seguinte maneira

$$\Omega : \begin{cases} -\sqrt{25-x^2} \leq z \leq \sqrt{25-x^2} \\ (x, y) \in K \end{cases}$$

onde K é o subconjunto do plano xy tal que $x^2 + y^2 \leq 5$. Com isto, temos que,

$$\begin{aligned} V &= \iint_K \left[\sqrt{25-x^2} - \left(-\sqrt{25-x^2} \right) \right] dx dy \\ &= 2 \iint_K \sqrt{25-x^2} dx dy \end{aligned}$$

O conjunto K , por sua vez pode ser expresso como

$$K : \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -\sqrt{25-x^2} \leq y \leq \sqrt{25-x^2} \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_{-5}^5 \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} \sqrt{25-x^2} dy dx \\ &= 2 \int_{-5}^5 \sqrt{25-x^2} y \Big|_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} dx \\ &= 4 \int_{-5}^5 \sqrt{25-x^2} \sqrt{25-x^2} dx \\ &= 4 \int_{-5}^5 (25-x^2) dx \\ &= 4 \left(25x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-5}^5 \\ &= \frac{2000}{3} \end{aligned}$$

Exercício 4 Usando coordenadas polares,

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r$$

O conjunto Ω , neste referencial, torna-se

$$\Omega_1 : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

Assim

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \iint_{\Omega_1} e^{-r^2} r d\theta dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\theta dr \\ &= \int_0^1 e^{-r^2} r \theta \Big|_0^{2\pi} dr \\ &= 2\pi \int_0^1 e^{-r^2} r dr \\ &= -\pi e^{-r^2} \Big|_0^1 \\ &= \pi \left(1 - \frac{1}{e} \right) \end{aligned}$$

■

Exercício 5 Chamando de Ω o conjunto que representa a lâmina em questão, segue-se que

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

e a massa desta lâmina é dada por

$$M = \iint_{\Omega} \delta(x, y) dx dy$$

sendo δ a densidade da mesma. De acordo com o enunciado do problema, temos que $\delta(x, y)$ é proporcional ao quadrado da distância de (x, y) à origem, ou seja

$$\delta(x, y) = k(x^2 + y^2), \quad k \in \mathbb{R}$$

Assim,

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 \int_0^1 k(x^2 + y^2) dx dy \\ &= k \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x \right) \Big|_0^1 dy \\ &= k \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y^2 \right) dy \\ &= k \left(\frac{1}{3} y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{3} k \end{aligned}$$

■