

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito Prova Final
Data: Sábado, 14 de Setembro

2014
Turma PX

Exercício 1

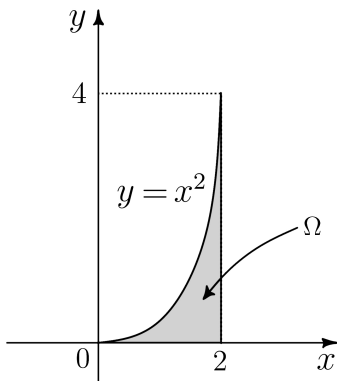
a). Desejamos calcular a integral

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{y \, dx \, dy}{\sqrt{1+x^5}}$$

Para isto, observe que o domínio de integração é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} \sqrt{y} \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

cujos desenho é esboçado na figura abaixo



De acordo com esta figura, podemos perceber que o conjunto Ω também pode ser descrito da seguinte forma

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{y \, dx \, dy}{\sqrt{1+x^5}} &= \int_0^2 \int_0^{x^2} \frac{y \, dy \, dx}{\sqrt{1+x^5}} \\ &= \int_0^2 \frac{y^2}{2\sqrt{1+x^5}} \Big|_0^{x^2} dx \\ &= \int_0^2 \frac{x^4 dx}{2\sqrt{1+x^5}} \end{aligned}$$

Considere

$$u = 1 + x^5$$

e observe que

$$du = 5x^4 dx$$

e além disto,

$$x = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow u = 33$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{y \, dx \, dy}{\sqrt{1+x^5}} &= \int_0^2 \frac{x^4 dx}{2\sqrt{1+x^5}} \\ &= \int_1^{33} \frac{du}{10\sqrt{u}} \\ &= \frac{2}{10} \sqrt{u} \Big|_1^{33} \\ &= \frac{1}{5} (\sqrt{33} - 1) \end{aligned}$$

□

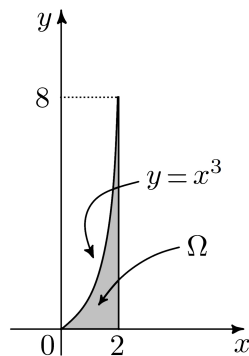
b). Desejamos agora calcular a seguinte integral iterada

$$\int_0^2 \int_{x^3}^8 e^{\left(\frac{x}{\sqrt[3]{y}}\right)} dy dx$$

Observe, no entanto, que o domínio de integral é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x^3 \leq y \leq 8 \end{cases}$$

cujo esboço é da na seguinte figura



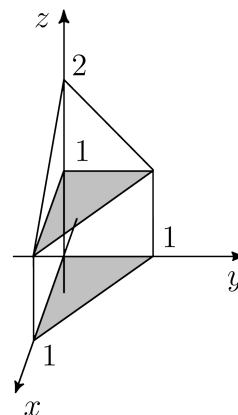
Observando a figura podemos perceber que o conjunto Ω também pode ser descrito por

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt[3]{y} \\ 0 \leq y \leq 8 \end{cases}$$

Com isto, segue-se que

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{x^3}^8 e^{\left(\frac{x}{\sqrt[3]{y}}\right)} dy dx &= \int_0^8 \int_0^{\sqrt[3]{y}} e^{\left(\frac{x}{\sqrt[3]{y}}\right)} dx dy \\ &= \int_0^8 \sqrt[3]{y} e^{\left(\frac{x}{\sqrt[3]{y}}\right)} \Big|_0^{\sqrt[3]{y}} dy \\ &= \int_0^8 \sqrt[3]{y} \left[e^{\left(\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{y}}\right)} - 1 \right] dy \\ &= (e-1) \int_0^8 \sqrt[3]{y} dy \\ &= \frac{3(e-1)}{4} y^{\frac{4}{3}} \Big|_0^8 \\ &= 12(e-1) \end{aligned}$$

questão, obtemos a seguinte figura



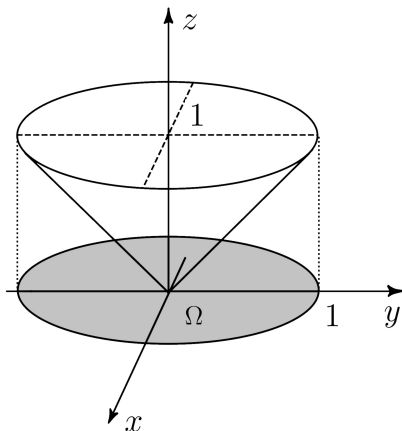
Observando esta figura podemos deduzir que o sólido Ω pode ser descrito por

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1-x \\ 1 \leq z \leq 2-x-y \end{cases}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} 3z dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_1^{2-x-y} 3z dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{3}{2} z^2 \Big|_1^{2-x-y} dy dx \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} [(2-x-y)^2 - 1] dy dx \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2 + 2xy - 4x + y^2 - 4y + 3) dy dx \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 \left(x^2 y + xy^2 - 4xy + \frac{y^3}{3} - 2y^2 + 3y \right) \Big|_0^{1-x} dx \\ &= \frac{3}{2} \frac{1}{3} \int_0^1 (-x^3 + 6x^2 - 9x + 4) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{x^4}{4} + 2x^3 - \frac{9x^2}{2} + 4x \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

Exercício 3 Realizando um esboço deste sólido, obtemos a seguinte figura



Uma parametrização possível para esta superfície é dada por

$$\sigma : \begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2} \end{cases}, \underbrace{u^2 + v^2 \leq 1}_{\Omega}$$

e disto, temos que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left(\frac{-u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, 1 \right)$$

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| = \sqrt{2}$$

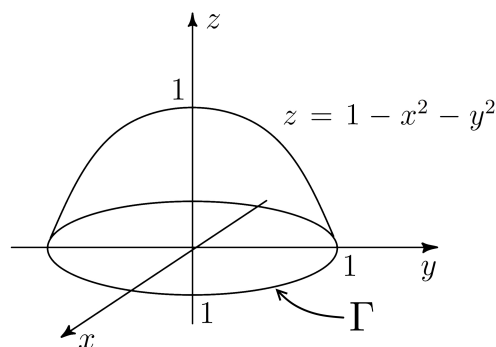
Portanto,

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) dS &= \iint_{\Omega} (u^2 + v^2) \sqrt{2} du dv \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 r dr d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^{2\pi} r^4 \Big|_0^1 d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \end{aligned}$$

■

Exercício 4 Esboçando a superfície em questão temos a seguinte figura



Uma possível parametrização para a fronteira desta superfície é dada por

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

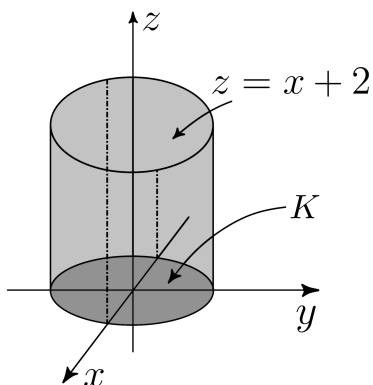
Observe, porém, que σ corresponde ao interior da curva Γ e, pelo **Teorema de Stokes**, segue-se que

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\Gamma \\ &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\Gamma(t)) \cdot \Gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\cos t, \sin t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t + 3 \cos t, 2 \cos t - \operatorname{sen} t, \\
 &\quad \cos t \operatorname{sen}^2 t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0) \, dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}^2 t - 3 \operatorname{sen} t \cos t + 2 \cos^2 t \\
 &\quad - \operatorname{sen} t \cos t) \, dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}^2 t - 4 \operatorname{sen} t \cos t + 2 \cos^2 t) \, dt \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

■

Exercício 5 Desenhando o sólido em questão obtemos a seguinte figura



e dela segue-se que o interior da superfície em questão é dado por

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq z \leq x + 2 \\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

Usando o Teorema de Divergência de Gauss

temos que

$$\begin{aligned}
 \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz \\
 &= \iiint_{\Omega} (4x^3 + 0 + 4xy^2) \, dx \, dy \, dz \\
 &= \iiint_{\Omega} 4x(x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz
 \end{aligned}$$

Usando coordenada cilíndricas, o conjunto Ω pode ser descrito da seguinte maneira

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq r \cos \theta + 2 \end{cases}$$

e temos com isto, que

$$\begin{aligned}
 \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{r \cos \theta + 2} 4r \cos \theta r^2 \, dz \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 4r^4 \cos \theta z \Big|_0^{r \cos \theta + 2} \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4r^5 \cos^2 \theta + 8r^4 \cos \theta) \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2r^6}{3} \cos^2 \theta + \frac{8r^5}{5} \cos \theta \right) \Big|_0^1 \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3} \cos^2 \theta + \frac{8}{5} \cos \theta \right) \, d\theta \\
 &= \frac{2\pi}{3}
 \end{aligned}$$

■