

Universidade Federal do Vale do São Francisco  
Engenharia Civil  
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito 3ª Prova  
Data: Quinta-feira, 22 de Junho

2014  
Turma PX

**Exercício 1** Desejamos calcular a integral

$$I = \int_{\gamma} 2x \cos y \, dx - x^2 \sin y \, dy$$

onde  $\gamma$  é o trecho da parábola  $y = (x - 1)^2$  do ponto  $(1, 0)$  ao ponto  $(0, 1)$ . Considere

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

onde

$$P(x, y) = 2x \cos y$$

$$Q(x, y) = -x^2 \sin y$$

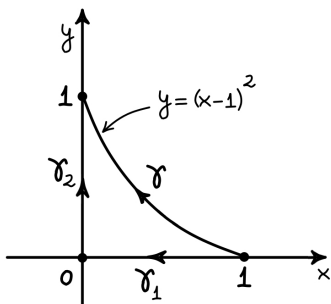
Observe que

$$\text{rot } \mathbf{F} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

e

$$\text{Dom}_F = \mathbb{R}^2$$

que é um conjunto simplesmente conexo. Podemos afirmar, portanto que  $F$  é um campo conservativo, ou seja a integral que desejamos calcular é independente do caminho escolhido.



Sendo assim, considere o caminho

$$\bar{\gamma} = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = 1 - t \\ y(t) = 0 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

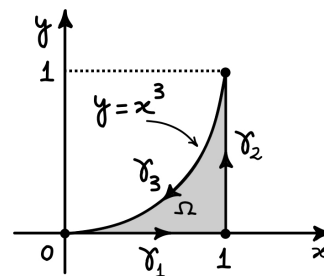
$$\gamma_2 : \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

e teremos

$$\begin{aligned} I &= \int_{\gamma} 2x \cos y \, dx - x^2 \sin y \, dy \\ &= \int_{\bar{\gamma}} 2x \cos y \, dx - x^2 \sin y \, dy \\ &= \int_{\gamma_1} 2x \cos y \, dx - x^2 \sin y \, dy + \\ &\quad \int_{\gamma_2} 2x \cos y \, dx - x^2 \sin y \, dy \\ &= \int_0^1 2(1-t) \cos 0 (-dt) + \int_0^1 0 dt \\ &= -2 \int_0^1 (1-t) dt \\ &= -1 \end{aligned}$$

■

**Exercício 2** Realizando um esboço da região dada no problema obtemos a seguinte figura



Como a curva em questão é fechada e seu interior  $\Omega$  obedece os requisitos necessários, podemos aplicar o **Teorema de Green** para calcular o trabalho

realizado pela força, ou seja

$$\begin{aligned}\tau &= \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma \\ &= \iint_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{F} \, dx \, dy\end{aligned}$$

Sendo

$$\mathbf{F}(x, y) = 2xy^3 \mathbf{i} + 4x^2y^2 \mathbf{j}$$

teremos

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y) &= 8xy^2 - 6xy^2 \\ &= 2xy^2\end{aligned}$$

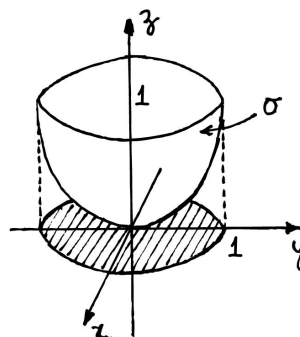
Além disto, observe que

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^3 \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\tau &= \iint_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{F} \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{x^3} 2xy^2 \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \left. \frac{2}{3}xy^3 \right|_0^{x^3} dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 x^{10} dx \\ &= \frac{2}{33} x^{11} \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{33}\end{aligned}$$

questão é dado na figura abaixo



Uma parametrização possível para esta superfície é dada por

$$\sigma : \begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = u^2 + v^2 \end{cases}, \underbrace{0 \leq u^2 + v^2 \leq 1}_K$$

Observe que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = (1, 0, 2u)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = (0, 1, 2v)$$

e

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = (-2u, -2v, 1)$$

Como desejamos calcular o fluxo exterior, escolheremos

$$n = - \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\|}$$

e, tal fluxo é dado por

$$\begin{aligned}\iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot n \, dS &= \iint_K -\mathbf{F}(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\|} \\ &\quad \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du \, dv \\ &= \iint_K \mathbf{F}(u, v, u^2 + v^2) \cdot (2u, 2v, -1) du \, dv \\ &= \iint_K (4u, 4v, 2) \cdot (2u, 2v, -1) du \, dv \\ &= \iint_K (8u^2 + 8v^2 - 2) du \, dv\end{aligned}$$

**Exercício 3** Um esboço possível para o sólido em

Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} u = r \cos \theta \\ v = r \sin \theta \end{cases}$$

cujos jacobiano é

$$|J| = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(r, \theta)} \right| = r$$

o conjunto  $K$  torna-se

$$K_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_K (8u^2 + 8v^2 - 2) \, du \, dv \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (8r^2 - 2) \, r \, d\theta \, dr \\ &= 2\pi \int_0^1 (8r^3 - 2r) \, dr \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

é dado por

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

Assim, considere  $\Gamma$  uma parametrização qualquer para a fronteira desta região e  $\sigma$  uma parametrizado da região dada. Pelo **Teorema de Stokes** podemos afirmar que o fluxo exterior é

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\Gamma = \iint_{\sigma} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Perceba, entretanto que

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + z^2 & x^2 + z^2 & x^2 + y^2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(y - z, z - x, x - y)$$

e

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n} = 2(y - z, z - x, x - y) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}(y - z + z - x + x - y)$$

$$= 0$$

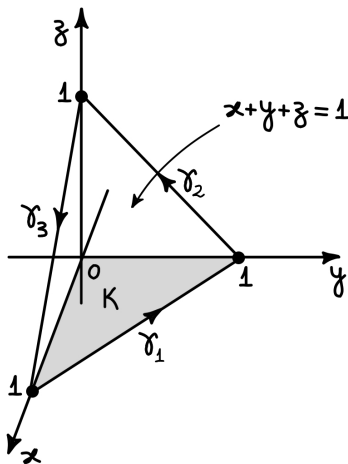
para  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , ou seja

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\Gamma = \iint_{\sigma} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

$$= \iint_{\sigma} 0 \, dS$$

$$= 0$$

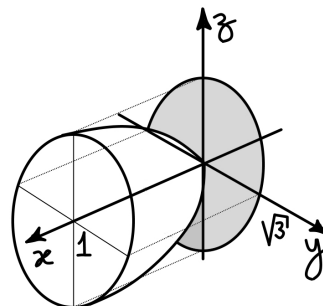
**Exercício 4** Um esboço para a região em questão é dada abaixo



Observe que o vetor normal unitário apontando para cima do plano

$$x + y + z = 1$$

**Exercício 5** Um esboço para a superfície em questão é dado abaixo



Uma parametrização possível para esta superfície é

$$\sigma : \begin{cases} x(u, v) = \frac{u^2 + v^2}{3} \\ y(u, v) = u \\ z(y, v) = v \end{cases}, \underbrace{0 \leq u^2 + v^2 \leq 3}_K$$

Observe que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \left( \frac{2}{3}u, 1, 0 \right)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left( \frac{2}{3}v, 0, 1 \right)$$

e

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left( 1, -\frac{2}{3}u, -\frac{2}{3}v \right)$$

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| = \sqrt{1 + \frac{4}{9}(u^2 + v^2)}$$

Por fim, a área pedida é dada por

$$\begin{aligned} A &= \iint_{\sigma} dS \\ &= \iint_K \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du dv \\ &= \iint_K \sqrt{1 + \frac{4}{9}(u^2 + v^2)} du dv \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} u = r \cos \theta \\ v = r \sin \theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(r, \theta)} \right| = r$$

o conjunto  $K$  torna-se

$$K_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{3} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Teremos

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} r \sqrt{1 + \frac{4}{9}r^2} dr d\theta \\ &= \frac{3\pi}{2} \left( \frac{7}{9}\sqrt{21} - 1 \right) \end{aligned}$$

■