

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito 2ª Prova
Data: Segunda-feira, 11 de Agosto

2014
Turma PX

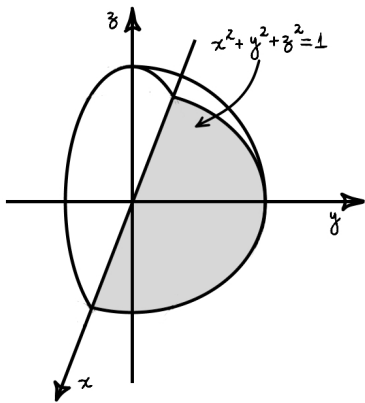
Exercício 1 Desejamos calcular a integral

$$A = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dz dy dx$$

Observe que, neste caso, o domínio de integração é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$$

cujos esboço é dado na figura abaixo



Assim, usando coordenadas esféricas,

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

cujos jacobiano é dado por

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} \right| = \rho^2 \sin \varphi$$

O conjunto Ω torna-se

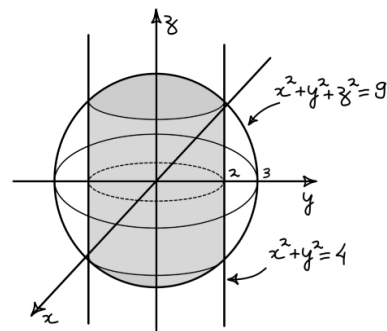
$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A &= \iiint_{\Omega_2} e^{-(\rho^2)^{\frac{3}{2}}} |J| d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} e^{-\rho^3} \rho^2 \sin \varphi d\theta d\varphi d\rho \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^3} \rho^2 \sin \varphi \Big|_0^{\pi} d\varphi d\rho \\ &= \pi \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^3} \rho^2 \sin \varphi d\varphi d\rho \\ &= -\pi \int_0^1 e^{-\rho^3} \rho^2 \cos \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\rho \\ &= \pi \int_0^1 e^{-\rho^3} \rho^2 d\rho \\ &= -\frac{\pi}{3} e^{-\rho^3} \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{e} \right) \end{aligned}$$

■

Exercício 2 Realizando um esboço do sólido Ω em questão, obtemos a seguinte figura



Usando coordenadas cilíndricas,

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \rho$$

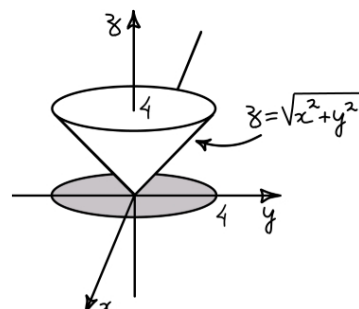
o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 2 \\ -\sqrt{9-\rho^2} \leq z \leq \sqrt{9-\rho^2} \end{cases}$$

E com isto, segue-se que o volume procurado é

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_{\Omega_2} |J| \, d\rho \, d\theta \, dz \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{9-\rho^2}}^{\sqrt{9-\rho^2}} \rho \, dz \, d\theta \, d\rho \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \rho z \Big|_{-\sqrt{9-\rho^2}}^{\sqrt{9-\rho^2}} d\theta \, d\rho \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} 2\rho\sqrt{9-\rho^2} d\theta \, d\rho \\ &= \int_0^2 2\rho\sqrt{9-\rho^2} \theta \Big|_0^{2\pi} d\rho \\ &= 4\pi \int_0^2 \rho\sqrt{9-\rho^2} d\rho \\ &= \frac{4\pi}{3} (27 - 5\sqrt{5}) \end{aligned}$$

questão é dado na figura abaixo



Usando coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \rho$$

o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 4 \\ r \leq z \leq 4 \end{cases}$$

A distância de um ponto qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ao eixo z , é dada por

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e, como a densidade neste mesmo ponto é proporcional à distância ao eixo z , segue-se que

$$\delta(x, y, z) = kd = k\sqrt{x^2 + y^2}$$

Exercício 3 Um esboço possível para o sólido em

onde $k \in \mathbb{R}$. Assim, o momento de inércia procurado

será então

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_{\Omega} d^2 \delta dx dy dz \\
 &= \iiint_{\Omega} k (x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz \\
 &= k \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dx dy dz \\
 &= k \iiint_{\Omega_2} (\rho^2)^{\frac{3}{2}} |J| d\rho d\theta dz \\
 &= k \int_0^4 \int_0^{2\pi} \int_{\rho}^4 \rho^3 \rho dz d\theta d\rho \\
 &= k \int_0^4 \int_0^{2\pi} \rho^4 (4 - \rho) d\theta d\rho \\
 &= 2k\pi \int_0^4 (4\rho^4 - \rho^5) d\rho \\
 &= \frac{4096}{15} k\pi
 \end{aligned}$$

Exercício 4 O segmento de reta que vai do ponto $(0, 0, 0)$ ao ponto $(1, 2, 3)$ pode ser parametrizado da seguinte forma

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2t \\ z(t) = 3t \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} xyz ds &= \int_0^1 x(t)y(t)z(t) \|\gamma'(t)\| dt \\
 &= 6 \int_0^1 t^3 \|(1, 2, 3)\| dt \\
 &= 6\sqrt{14} \int_0^1 t^3 dt \\
 &= \frac{3}{2}\sqrt{14}
 \end{aligned}$$

Exercício 5 O trecho da curva $y = x^3$ indo do ponto $(0, 0)$ ao ponto $(2, 8)$ pode ser parametrizado da seguinte maneira

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^3 \end{cases}, 0 \leq t \leq 2$$

e, o trabalho realizado pela força \mathbf{F} ao longo deste trajeto é dado por

$$\begin{aligned}
 \tau &= \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma \\
 &= \int_0^2 \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
 &= \int_0^2 F(t, t^3) \cdot (1, 3t^2) dt \\
 &= \int_0^2 (t^2 + t^6, t^4) \cdot (1, 3t^2) dt \\
 &= \int_0^2 (t^2 + 4t^6) dt \\
 &= \left(\frac{t^3}{3} + 4\frac{t^7}{7} \right) \Big|_0^2 \\
 &= \frac{8}{3} + \frac{512}{7} \\
 &= \frac{1592}{21}
 \end{aligned}$$