

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

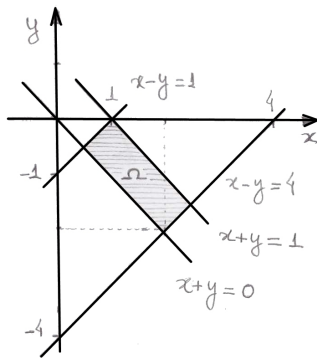
Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito 1ª Prova
Data: Sexta-feira, 13 de Junho

2014
Turma PX

Exercício 1 Desenhando o conjunto Ω temos a seguinte figura



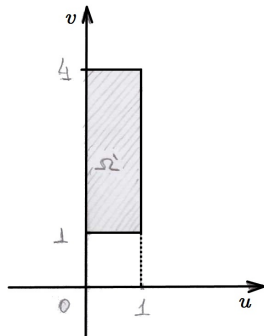
Considere a seguinte mudança de variáveis

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \varphi : \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases},$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \frac{1}{2}$$

Neste referencial, o conjunto Ω torna-se



$$\Omega' : \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 1 \leq v \leq 4 \end{cases}$$

Portanto, segue-se que

$$\iint_{\Omega} (x-y)e^{x^2-y^2} dx dy = \iint_{\Omega'} (x-y)e^{(x+y)(x-y)} dx dy$$

$$= \iint_{\Omega'} ve^{uv} |J| du dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^4 \int_0^1 ve^{uv} du dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^4 e^{uv} \Big|_0^1 dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^4 (e^v - 1) dv$$

$$= \frac{1}{2} e^v - v \Big|_1^4$$

$$= \frac{1}{2} (e^4 - e - 3)$$

■

Exercício 2

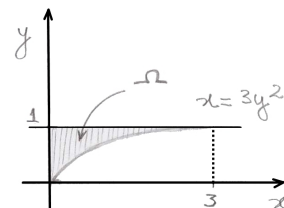
a). Desejamos calcular a integral

$$\int_0^3 \int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^1 e^{y^3} dy dx$$

Para isto, observe que o domínio de integração é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ \sqrt{\frac{x}{3}} \leq y \leq 1 \end{cases}$$

cujo desenho é esboçado na figura abaixo



Observe porém, que o conjunto Ω pode também ser descrito da seguinte maneira

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 3y^2 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^1 e^{y^3} dy dx &= \int_0^1 \int_0^{3y^2} e^{y^3} dx dy \\ &= \int_0^1 e^{y^3} x \Big|_0^{3y^2} dy \\ &= \int_0^1 3y^2 e^{y^3} dy \\ &= e^{y^3} \Big|_0^1 \\ &= e - 1 \end{aligned}$$

□

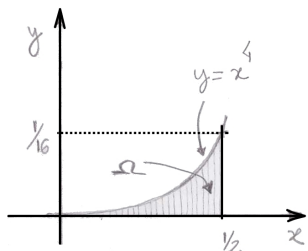
b). Desejamos agora, calcular a integral

$$\int_0^{\frac{1}{16}} \int_{y^{\frac{1}{4}}}^{\frac{1}{2}} \cos(16\pi x^5) dx dy$$

De modo semelhante ao que foi feito no item anterior, observe que o domínio de integração é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} y^{\frac{1}{4}} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 \leq y \leq \frac{1}{16} \end{cases}$$

cujos esboço é dado pela seguinte figura



Observe que o conjunto Ω pode também ser descrito na forma

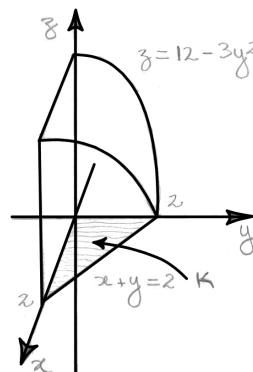
$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 \leq y \leq x^4 \end{cases}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{16}} \int_{y^{\frac{1}{4}}}^{\frac{1}{2}} \cos(16\pi x^5) dx dy &= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{x^4} \cos(16\pi x^5) dy dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(16\pi x^5) y \Big|_0^{x^4} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} x^4 \cos(16\pi x^5) dx \\ &= \frac{\operatorname{sen}(16\pi x^5)}{80\pi} \Big|_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}{80\pi} \\ &= \frac{1}{80\pi} \end{aligned}$$

■

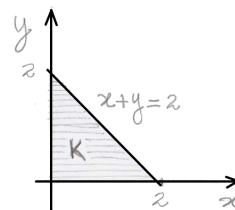
Exercício 3 Esboçando o sólido em questão, obtemos a seguinte figura



donde segue-se que o volume procurado é dado por

$$V = \iint_K f(x, y) dx dy$$

onde



$$K : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 - y \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

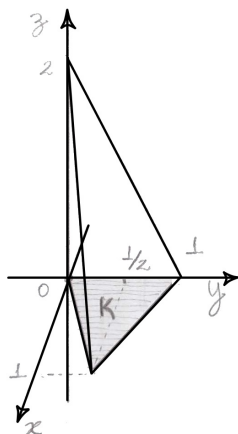
e

$$f(x, y) = 12 - 3y^2$$

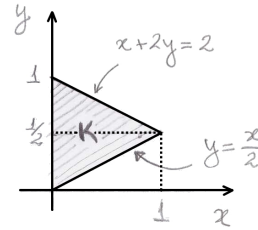
ou seja,

$$\begin{aligned} V &= \iint_K (12 - 3y^2) dx dy \\ &= \int_0^2 \int_0^{2-y} (12 - 3y^2) dx dy \\ &= \int_0^2 (12 - 3y^2) x \Big|_0^{2-y} dy \\ &= \int_0^2 (12 - 3y^2)(2 - y) dy \\ &= \int_0^2 (3y^3 - 6y^2 - 12y + 24) dy \\ &= \left(\frac{3}{4}y^4 - 2y^3 - 6y^2 + 24y \right) \Big|_0^2 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Exercício 4 Esboçando o tetraedro em questão, obtemos a seguinte figura



onde



Necessitamos, portanto, encontrar a equação do plano que passa pelos pontos

$$A = (1, \frac{1}{2}, 0)$$

$$B = (0, 1, 0)$$

$$C = (0, 0, 2)$$

Observe, então, que os vetores

$$v_1 = B - A = (-1, \frac{1}{2}, 0)$$

$$v_2 = C - A = (-1, -\frac{1}{2}, 2)$$

estão sobre este plano, ou seja, seu vetor normal é dado por

$$\mathbf{n} = v_1 \times v_2 = (1, 2, 1)$$

e, com isto, temos que o plano procurado é formado pelos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$[(x, y, z) - B] \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x + 2y + z = 2$$

Assim, o volume que desejamos encontrar é dado por

$$V = \iint_K f(x, y) dx dy$$

onde K é o conjunto dos pontos (x, y) tais que

$$K : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x}{2} \leq y \leq \frac{2-x}{2} \end{cases}$$

e

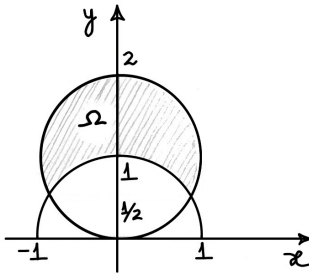
$$f(x, y) = 2 - x - 2y$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_K (2 - x - 2y) \, dx \, dy \\
 &= \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-x}{2}} (2 - x - 2y) \, dy \, dx \\
 &= \int_0^1 (2y - xy - y^2) \Big|_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-x}{2}} \, dx \\
 &= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) \, dx \\
 &= \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

■

Exercício 5 Desenhando a lâmina em questão, teremos



Calculando a interseção entre os dois círculos obtemos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Usando coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r$$

o conjunto Ω , neste sistema de coordenadas, torna-se

$$\Omega' : \begin{cases} \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6} \\ 1 \leq r \leq 2 \sin \theta \end{cases}$$

Perceba que a equação $x^2 + y^2 = 2y$ em coordenadas polares torna-se $r = 2 \sin \theta$.

Sabemos, do enunciado do problema, que a densidade da lâmina num ponto, é proporcional a distância deste ponto à origem, ou seja

$$\rho(x, y) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Assim, a massa desta lâmina é dada por

$$\begin{aligned}
 M &= \iint_{\Omega} \rho(x, y) \, dx \, dy \\
 &= k \iint_{\Omega} \frac{dx \, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
 &= k \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_1^{2 \sin \theta} \frac{|J|}{r} \, dr \, d\theta \\
 &= k \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_1^{2 \sin \theta} dr \, d\theta \\
 &= k \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} r \Big|_1^{2 \sin \theta} \, d\theta \\
 &= k \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2 \sin \theta - 1) \, d\theta \\
 &= k (-2 \cos \theta - \theta) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\
 &= 2k \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right)
 \end{aligned}$$

■