Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito Prova Final **2013**
Data: 25 de Março de 2014 **Turma A3**

Exercício 1

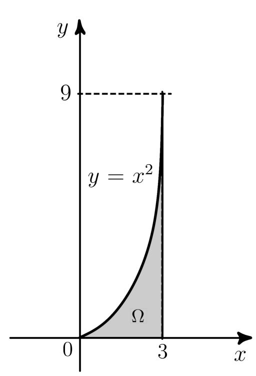
a). *Desejamos calcular a integral*

$$\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \operatorname{sen}\left(x^3\right) dx\, dy$$

Para isto, observe que o domínio de integração é

$$\Omega : \begin{cases} \sqrt{y} \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{cases}$$

cujo gráfico pode ser esboçado da seguinte maneira



Observe que o conjunto Ω também pode ser expresso da seguinte forma

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$$

Portanto

$$\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \operatorname{sen}\left(x^3\right) dx\, dy = \int_0^3 \int_0^{x^2} \operatorname{sen}\left(x^3\right) dy\, dx$$

$$= \int_0^3 \operatorname{sen}\left(x^3\right)\, y\Big|_0^{x^2} dx$$

$$= \int_0^3 x^2 \operatorname{sen}\left(x^3\right) dx$$

$$= -\frac{1}{3}\cos\left(x^3\right)\Big|_0^3$$

$$= \frac{1-\cos(27)}{3}$$

$\square$

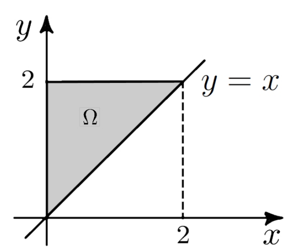
b). *Desejamos agora, calcular a integral*

$$\int_0^2 \int_x^2 y^4 \cos\left(xy^2\right) dy\, dx$$

Observe, no entanto, que seu domínio de integração é dado por

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq 2 \end{cases}$$

que está esboçado na seguinte figura



Disto segue-se que Ω também pode ser expresso da seguinte maneira

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\int_0^2\int_x^2 y^4\cos\left(xy^2\right)dy\,dx = \int_0^2\int_0^y y^4\cos\left(xy^2\right)dx\,dy$$

$$= \int_0^2 y^4 \frac{\operatorname{sen}\left(xy^2\right)}{y^2}\Bigg|_0^y dy$$

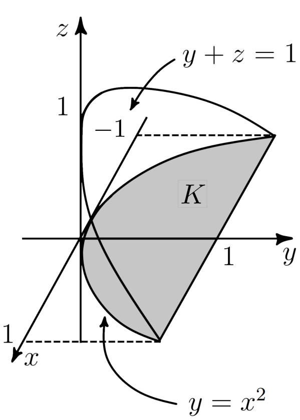
$$= \int_0^2 y^2\operatorname{sen}\left(y^3\right)\,dy$$

$$= -\frac{\cos\left(y^3\right)}{3}\Bigg|_0^2$$

$$= \frac{1-\cos(8)}{3}$$

■

Exercício 2 *Realizando um esboço do sólido em questão, obtemos a seguinte figura*



Portanto, o volume procurado é dado por

$$V = \iint_K \int_0^{1-y} dz\,dx\,dy$$

sendo

$$K : \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Ou seja,

$$V = \iint_K \int_0^{1-y} dz\,dx\,dy$$

$$= \iint_K z\Big|_0^{1-y} dx\,dy$$

$$= \iint_K (1-y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^1\int_{x^2}^1 (1-y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^1 \left(y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^1 dy$$

$$= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2}\right)dx$$

$$= \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_{-1}^1$$

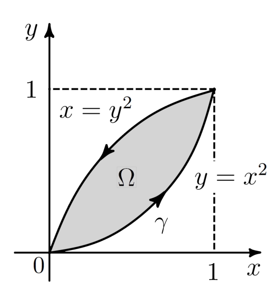
$$= \frac{8}{15}$$

■

Exercício 3 *Desejamos calcular*

$$I = \oint_\gamma \left(y + e^{\sqrt{x}}\right)dx + \left(2x + \cos\left(y^2\right)\right)dy$$

Realizando um esboço da região delimitada pelas curvas dadas, obtemos a seguinte figura



Como trata-se de uma curva fechada, o ***Teorema de Green*** *nos garante que*

$$I = \iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(2x + \cos\left(y^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(y + e^{\sqrt{x}}\right)\right]dx\,dy$$

onde

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$$

Ou seja

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (2-1)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 y \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx$$

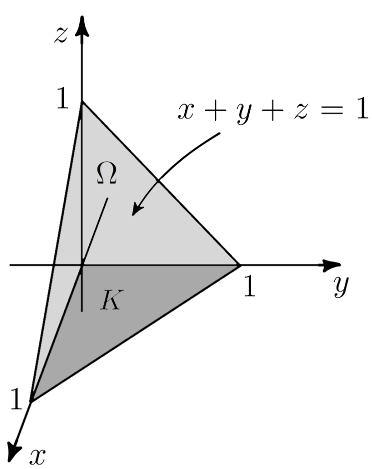
$$= \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx$$

$$= \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}$$

■

Exercício 4 *Observe que a região dada possui o seguinte esboço*



Desta forma, o fluxo que desejamos calcular será

$$\tau = \iint_\sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Como trata-se de uma região fechada, o ***Teorema da Divergência*** *nos garante que*

$$\iint_\sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F}\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(2yz) + \frac{\partial}{\partial z}(3z)\right] dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_\Omega (2 + 2z + 3)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iint_K \int_0^{1-x-y} (5 + 2z)\, dz\, dx\, dy$$

sendo

$$K : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - y \end{cases}$$

Ou seja

$$\iint_\sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_K \left(5z + z^2\right)\Big|_0^{1-x-y} dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[5\,(1-x-y) + (1-x-y)^2\right] dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(x^2 + y^2 + 2xy - 7x - 7y + 6\right) dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} + xy^2 - 7xy - \frac{7y^2}{2} + 6y\right)\Big|_0^{1-x} dx$$

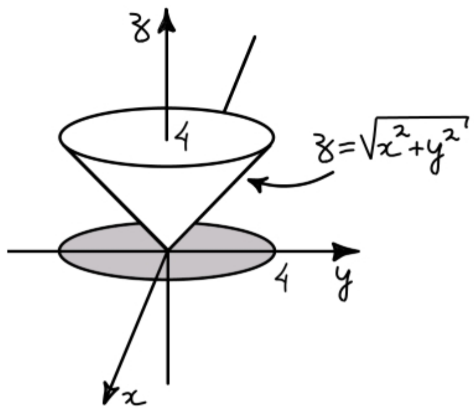
$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 6x + \frac{17}{6}\right) dx$$

$$= \left(-\frac{1}{12}x^4 + \frac{7}{6}x^3 - 3x^2 + \frac{17}{6}x\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{11}{12}$$

■

Exercício 5 *Realizando um esboço da região em questão obtemos a seguinte figura*



Observe que a fronteira desta região é a curva dada pela seguinte parametrização

$$\Gamma : \begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\operatorname{sen} t \quad ; 0 \leq t \leq 2\pi \\ z = 4 \end{cases}$$

Assim, usando o ***Teorema de Stokes****, temos que*

$$\begin{aligned}
\iint_\sigma \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS &= \oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\Gamma \\
&= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}\left(4\cos t, 4\operatorname{sen} t, 4\right) \cdot (-4\operatorname{sen} t, 4\cos t, 0)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-4\operatorname{sen} t, 4\cos t, -2) \cdot (-4\operatorname{sen} t, 4\cos t, 0)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(16\operatorname{sen}^2 t + 16\cos^2 t\right) dt \\
&= 16\int_0^{2\pi} dt \\
&= 32\pi
\end{aligned}$$

■