Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

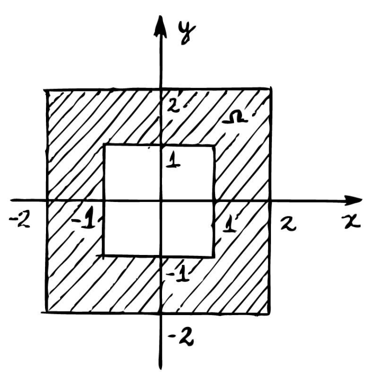
2^{o} Semestre

Gabarito 3ª Prova **2013**
Data: Quinta-feira, 22 de Junho **Turma A3**

Exercício 1 *Considere*

$$I = \oint_{\gamma} (1 - x^2 y)dx + \operatorname{sen} y\, dy$$

Observe na figura abaixo que a curva γ e o conjunto Ω que consiste no interior de γ, obedecem às condições necessárias ao uso do ***Teorema de Green****.*



E assim, usando-o, teremos que

$$I = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{sen} y) - \frac{\partial}{\partial x}\left(1 - x^2 y\right) \right] dx\, dy$$

$$= \iint_{\Omega} x^2 dx\, dy$$

Onde

$$\Omega = R_M - R_m$$

com

$$R_M : \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

$$R_m : \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

ou seja,

$$I = \iint_{R_M} x^2 dx\, dy - \iint_{R_m} x^2 dx\, dy$$

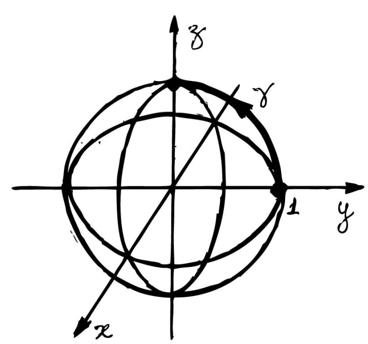
$$= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} x^2 dx dy - \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2 dx dy$$

$$= \frac{64}{3} - \frac{4}{3}$$

$$= 20$$

■

Exercício 2 *Uma parametrizaçãopossívelpara a curva γ é dada por*



$$\gamma : \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = \cos t \quad ; 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2} \\ z(t) = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

e com isto, temos que

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{F}(0, \cos t, \operatorname{sen} t) \cdot (0, -\operatorname{sen} t, \cos t)\ dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\text{sen}^2 t, -2\cos t \,\text{sen}\, t, -\cos^2 t\right) \cdot$$
$$\cdot\, (0, -\text{sen}\, t, \cos t)\; dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos t \,\text{sen}^2 t - \cos^3 t\right) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2\cos t \,\text{sen}^2 t - \left(1 - \text{sen}^2 t\right)\cos t\right] dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3\cos t \,\text{sen}^2 t - \cos t\right) dt$$

$$= \left(\text{sen}^3 t - \text{sen}\, t\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 0$$

■

(Outro modo de resolver este exercício)

Observe que, sendo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2xy + z^2)\mathbf{i} + (x^2 - 2yz)\mathbf{j} + (2xz - y^2)\mathbf{k}$$

teremos

$$\text{rot}\, \mathbf{F}(x,y,z) = 0$$

e como $D_{\mathbf{F}} = \mathbb{R}^3$ (simplesmente conexo), segue-se que F é um campo conservativo em todo o $\mathbb{R}^3$ e portanto, a integral em questão é independente do caminho. Desta forma, tomando o caminho

$$\bar{\gamma} = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

onde

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 1 - t \quad ; 0 \le t \le 1 \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \quad ; 0 \le t \le 1 \\ z(t) = t \end{cases}$$

E assim, temos que

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\gamma = \int_{\bar{\gamma}} \mathbf{F} \cdot d\bar{\gamma}$$

$$= \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\gamma_1 + \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\gamma_2$$

$$= \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt + \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt$$

$$= \int_0^1 \mathbf{F}(0, 1-t, 0) \cdot (0, -1, 0) dt +$$
$$+ \int_0^1 \mathbf{F}(0,0,t) \cdot (0,0,1) dt$$

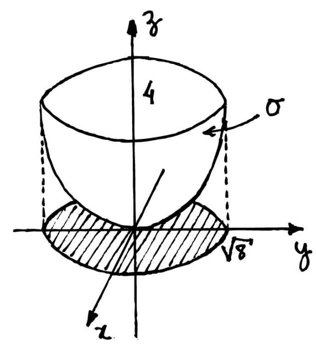
$$= \int_0^1 (0, 0, (1-t)^2) \cdot (0, -1, 0) dt +$$
$$+ \int_0^1 (t^2, 0, 0) \cdot (0,0,1) dt$$

$$= \int_0^1 0 dt + \int_0^1 0 dt$$

$$= 0$$

■

Exercício 3 *Realizando um esboço da superfície que corresponde à lâmina em questão temos a seguinte figura*



Uma parametrização possível desta superfície é dada por

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right) \end{cases} ; \underbrace{u^2 + v^2 \le 8}_{\Omega}$$

e, sua massa, considerando sua densidade $\delta(x,y,z) = k$, $k \in \mathbb{R}$, *pode ser obtida através da seguinte integral*

$$
\begin{aligned}
A &= \iint_\sigma \delta(x,y,z)\,dS \\
&= k\iint_\Omega \left\| \frac{\partial\sigma}{\partial u} \times \frac{\partial\sigma}{\partial v} \right\| du\,dv
\end{aligned}
$$

Observe porém que

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = (1,0,u)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v} = (0,1,v)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} \times \frac{\partial\sigma}{\partial v} = (-u,-v,1)$$

$$\left\| \frac{\partial\sigma}{\partial u} \times \frac{\partial\sigma}{\partial v} \right\| = \sqrt{u^2+v^2+1}$$

ou seja

$$A = k\iint_\Omega \sqrt{u^2+v^2+1}\,du\,dv$$

Usando coordenadas polares

$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)} \right| = r$$

o conjunto Ω *torna-se*

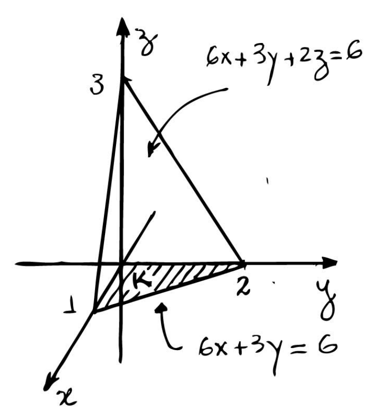
$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{8} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

e disto segue-se que

$$
\begin{aligned}
A &= k\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}} r\sqrt{r^2+1}\,dr\,d\theta \\
&= k\int_0^{2\pi}\int_1^{9} \frac{1}{2}\sqrt{w}\,dw\,d\theta \\
&= k\int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\sqrt{w^3}\,\Big|_1^9\, d\theta \\
&= k\int_0^{2\pi} \frac{26}{3}\,d\theta \\
&= \frac{52k\pi}{3}
\end{aligned}
$$

■

Exercício 4 *Um esboço possível da superfície em questão é dado pela figura abaixo*



e, uma parametrização possível para esta superfície é

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{1}{2}(6-6u-3v) \end{cases} ;\ (u,v) \in K$$

Observe que

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = (1,0,-3)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v} = \left(0,1,-\frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}=\left(3,\frac{3}{2},1\right)$$

Como estamos interessados no vetor normal que aponta para cima (componente z positiva), segue-se que

$$\mathbf{n}=\frac{\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}}{\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\|}$$

e assim, segue-se que

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS=\iint_K \mathbf{F}(\sigma(u,v))\cdot\mathbf{n}\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial v}\times\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right\|du\,dv$$

$$=\iint_K \mathbf{F}(\sigma(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\sigma}{\partial v}\times\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)du\,dv$$

$$=\iint_K \mathbf{F}\left(u,v,\frac{1}{2}(6-6u-3v)\right)\cdot$$
$$\cdot\left(3,\frac{3}{2},1\right)du\,dv$$

$$=\iint_K 3udu\,dv$$

Onde

$$K:\begin{cases}0\le u\le 1\\ 0\le v\le 2-2u\end{cases}$$

e com isto, temos que

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS=\int_0^1\int_0^{2-2u}3u\,dv\,du$$

$$=\int_0^1 3uv\Big|_0^{2-2u}du$$

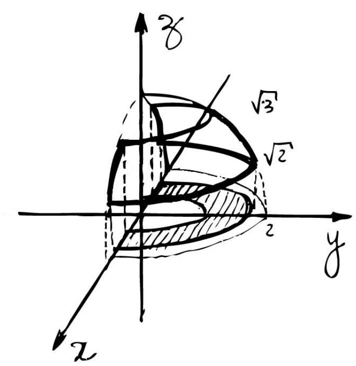
$$=3\int_0^1\left(2u-2u^2\right)du$$

$$=3\left(u^2-\frac{2}{3}u^3\right)\Big|_0^1$$

$$=1$$

■

Exercício 5 *Realizando um esboço da superfície dada, obtemos a seguinte figura*



e, uma parametrização possível para esta superfície é dada por

$$\sigma:\begin{cases}x(t)=2\text{sen}\,u\cos v\\ y(t)=2\,\text{sen}\,u\,\text{sen}\,v\quad;\ (u,v)\in\Omega\\ z(t)=2\cos u\end{cases}$$

onde

$$\Omega:\begin{cases}\frac{\pi}{6}\le u\le\frac{\pi}{4}\\ 0\le v\le\pi\end{cases}$$

Portanto,

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}=(2\cos u\cos v,2\cos u\,\text{sen}\,v,-2\,\text{sen}\,u)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v}=(-2\text{sen}\,u\,\text{sen}\,v,2\,\text{sen}\,u\ \cos v,0)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}=\left(4\cos v\text{sen}^2u,4\,\text{sen}^2u\,\text{sen}\,v,4\cos u\,\text{sen}\,u\right)$$

Observe que $4\cos u\,\text{sen}\,u\ge 0$ *quando* $(u,v)\in\Omega$, *ou seja o vetor normal à superfície* σ *apontando para cima é dado por*

$$n=\frac{\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}}{\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\|}$$

Além disto, observe que, sendo

$$\mathbf{F}(x,y,z)=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}+x^2\mathbf{k}$$

tem-se

$$\text{rot}\,\mathbf{F}(x,y,z)=(0,-2x,2)$$

Assim,

$$\iint_\sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_\Omega \operatorname{rot}\mathbf{F}(\sigma(u,v))\cdot \cdot\,\mathbf{n}\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\|du\,dv$$

$$= \iint_\Omega \operatorname{rot}\mathbf{F}(\sigma(u,v))\cdot\mathbf{n}\,du\,dv$$

$$= \iint_\Omega (0,-4\operatorname{sen}u\cos v,2)\cdot(4\cos v\operatorname{sen}^2 u, 4\operatorname{sen}^2 u\operatorname{sen}v, 4\cos u\operatorname{sen}u)\,du\,dv$$

$$= \iint_\Omega (-16\cos v\operatorname{sen}v\operatorname{sen}^3 u + 8\cos u\operatorname{sen}u)du\,dv$$

$$= \int_0^\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (-16\cos v\operatorname{sen}v\operatorname{sen}^3 u + 8\cos u\operatorname{sen}u)du\,dv$$

$$= \pi$$

□

(Outro modo de se resolver este exercício)

Uma parametrização possível para a superfície em questão seria

$$\sigma: \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{4-u^2-v^2} \end{cases} ;\ \underbrace{1\le u^2+v^2\le 2, v\ge 0}_{\Omega}$$

Observe que

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = \left(1,0,\frac{-u}{\sqrt{4-u^2-v^2}}\right)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v} = \left(0,1,\frac{-v}{\sqrt{4-u^2-v^2}}\right)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v} = \left(\frac{u}{\sqrt{-u^2-v^2+4}},\frac{v}{\sqrt{-u^2-v^2+4}},1\right)$$

Como estamos interessados no vetor normal apontando para cima segue-se que

$$n = \frac{\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}}{\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\|}$$

lém disto, observe que, sendo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$$

tem-se

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z) = (0,-2x,2)$$

e, disto segue-se que

$$\iint_\sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_\Omega \operatorname{rot}\mathbf{F}(\sigma(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)du\,dv$$

$$= 2\iint_\Omega\left(\frac{-uv}{\sqrt{4-u^2-v^2}}+1\right)du\,dv$$

Usando coordenadas polares,

$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)}\right| = r$$

o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2: \begin{cases} 1\le r\le\sqrt{2} \\ 0\le\theta\le\pi \end{cases}$$

e com isto, temos que

$$\iint_\sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = 2\iint_{\Omega_2}\left(\frac{-r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{4-r^2}}+1\right)r dr\,d\theta$$

$$= 2\int_0^\pi\int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{-r^3\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{4-r^2}}+r\right)dr\,d\theta$$

$$= \pi$$

■