Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Profº. Edson

2º Semestre

Gabarito 2ª Prova | **2013**
Data: Sexta-feira, 28 de Abril | **Turma A3**

Exercício 1 *Desejamos calcular a integral*

$$I = \iiint_\Omega \sqrt{x+y}\,\sqrt[3]{x+2y-z}\,dx\,dy\,dz$$

Para isto, considere a seguinte mudança de variáveis

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = x+y \\ v = x+2y-z \\ w = z \end{cases}$$

Observe que

$$\varphi : \begin{cases} x = 2u - v - w \\ y = -u + v + w \\ z = w \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = 1$$

e, neste referencial, o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} 1 \leq x+y \leq 2 \\ 0 \leq x+2y-z \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 1 \leq u \leq 2 \\ 0 \leq v \leq 1 \\ 0 \leq w \leq 1 \end{cases}$$

Portanto, segue-se que

$$I = \iiint_{\Omega_2} \sqrt{u}\,\sqrt[3]{v}\,|J|\,du\,dv\,dw$$

$$= \int_1^2\int_0^1\int_0^1 \sqrt{u}\,\sqrt[3]{v}\,dw\,dv\,du$$

$$= \int_1^2\int_0^1 \sqrt{u}\,\sqrt[3]{v}w\,\Big|_0^1 dv\,du$$

$$= \int_1^2\int_0^1 \sqrt{u}\,\sqrt[3]{v}\,dv\,du$$

$$= \int_1^2 \frac{3}{4}\sqrt{u}v^{\frac{4}{3}}\,\Big|_0^1 du$$

$$= \int_1^2 \frac{3}{4}\sqrt{u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}u^{\frac{3}{2}}\,\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{8}-1\right) = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

■

Exercício 2

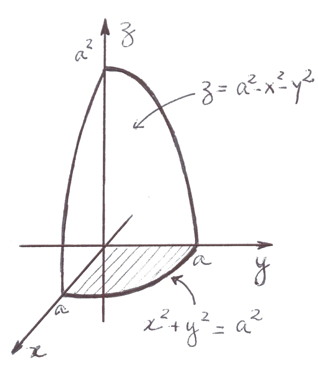
a). *Desejamos calcular a integral*

$$A = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{a^2-x^2-y^2} x^2\,dz\,dy\,dx$$

Para isto, observe que o domínio de integração é

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq \sqrt{a^2-x^2} \\ 0 \leq z \leq a^2 - x^2 - y^2 \end{cases}$$

cujo gráfico pode ser esboçado da seguinte maneira



Usando coordenadas cilíndricas, ou seja

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = r$$

O conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq z \leq a^2 - r^2 \end{cases}$$

e disto, segue-se que

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \int_0^{a^2-r^2} r^2\cos^2\theta\ |J|\ dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r^2\cos^2\theta\, r\, z\,\Big|_0^{a^2-r^2}\ dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r^3\cos^2\theta\left(a^2 - r^2\right) dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \cos^2\theta\left(a^2r^3 - r^5\right) dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\left(a^2\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6}\right)\Big|_0^a d\theta$$

$$= \frac{a^6}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta$$

$$= \frac{a^6}{24}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\theta + 1)\, d\theta$$

$$= \frac{a^6}{24}\left(\frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{2} + \theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi a^6}{48}$$

□

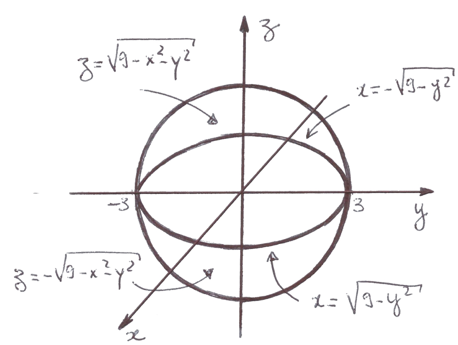
b). *Desejamos agora, calcular a seguinte integral*

$$B = \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}\int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{-\sqrt{9-x^2-y^2}} dz\, dx\, dy$$

e, o domínio de integração, neste caso é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} -\sqrt{9-y^2} \leq x \leq \sqrt{9-y^2} \\ -3 \leq y \leq 3 \\ -\sqrt{9-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{9-x^2-y^2} \end{cases}$$

cujo esboço é dado pela seguinte figura



Usando coordenadas esféricas, ou seja

$$\begin{cases} x = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}\right| = \rho^2\mathrm{sen}\,\varphi$$

o conjunto Ω, neste referencial, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \rho \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Assim, segue-se que

$$B = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^3 \rho\,|\,J|\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{3} \rho^3 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\varphi \, \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^3 \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \frac{81}{4}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\varphi \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \frac{81}{4}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\varphi \, \theta\Big|_0^{2\pi} \, d\varphi$$

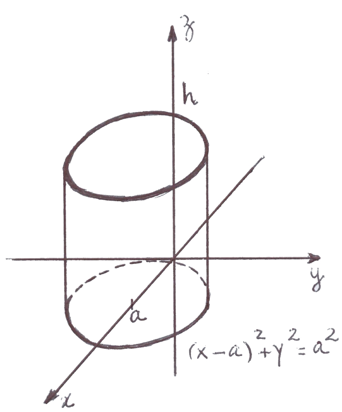
$$= \frac{81}{4}\int_0^{\pi} 2\operatorname{sen}\varphi \, d\varphi$$

$$= -\frac{81\pi}{2}\cos\theta\Big|_0^{\pi}$$

$$= 81\pi$$

■

Exercício 3 *Um esboço possível para o sólido em questão é dado na figura abaixo*



A distância de um ponto qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *ao eixo Oz, é dada por*

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e, o momento de inércia procurado é então

$$I = \iiint_{\Omega} r^2 \delta dx \, dy \, dz$$

onde $\delta(x, y, z) = k$, $k \in \mathbb{R}$, *é a densidade do sólido dado.*

Usando coordenadas cilíndricas, ou seja

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \rho$$

o conjunto Ω *torna-se*

$$\Omega_2 : \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \rho \le 2a\cos\theta \\ 0 \le z \le h \end{cases}$$

Portanto

$$I = \iint_{\Omega_2} r^2 \, k \, |J| \, d\rho \, d\theta \, dz$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{h}\int_0^{2a\cos\theta} \rho^2 \, k \, \rho \, d\rho \, dz \, d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{h} k\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{2a\cos\theta} \, dz \, d\theta$$

$$= 4ka^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{h} \cos^4\theta \, dz \, d\theta$$

$$= 4ka^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \, z\Big|_0^{h} \, d\theta$$

$$= 4ka^4 h\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta$$

$$= 4ka^4 h\left(\frac{3}{8}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{1}{32}\sin 4\theta\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{3}{2}k\pi a^4 h$$

■

Exercício 4 *O trecho da parábola* $x = y^2 + 1$ *do ponto* $(1, 0)$ *ao ponto* $(2, 1)$ *pode ser parametrizado da seguinte forma*

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t^2 + 1 \\ y(t) = t \end{cases}, \; 0 \le t \le 1$$

e o trabalho em questão, é dado por

$$\tau = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma$$

onde

$$\mathbf{F}(x,y) = x^2\mathbf{i} + ye^x\mathbf{j}$$

ou seja,

$$\tau = \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$$

$$= \int_0^1 \mathbf{F}(t^2+1,t) \cdot (2t,1)\,dt$$

$$= \int_0^1 \left(\left(t^2+1\right)^2, te^{t^2+1}\right) \cdot (2t,1)\,dt$$

$$= \int_0^1 \left[2t\left(t^2+1\right)^2 + te^{t^2+1}\right] dt$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e}{2} + \frac{7}{3}$$

■

Exercício 5 *Uma parametrização possível para a semicircunferência* $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0$ *é dada por*

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

e, calculando a massa do arame neste formato e de densidade homogênea

$$\delta(x,y) = k$$

teremos

$$M = \int_{\gamma} \delta(x,y)ds$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} k\,\|\gamma'(t)\|\,dt$$

$$= k\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2dt$$

$$= 2k\pi$$

e, seu centro de massa terá coordenadas

$$x_c = \frac{\displaystyle\int_{\gamma} x\delta(x,y)ds}{M}$$

$$= \frac{1}{2k\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t\, k\,\|\gamma'(t)\|\,dt$$

$$= \frac{2k}{2k\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t dt$$

$$= \frac{4}{\pi}$$

e

$$y_c = \frac{\displaystyle\int_{\gamma} y\delta(x,y)ds}{M}$$

$$= \frac{1}{2k\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\,\mathrm{sen}\,t\, k\,\|\gamma'(t)\|\,dt$$

$$= \frac{2k}{2k\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\,\mathrm{sen}\,t\,dt$$

$$= 0$$

concluímos, com isto, que o centro de massa procurado é o ponto $\left(\frac{4}{\pi}, 0\right)$. ■