Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

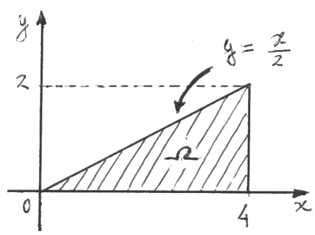
2^{o} Semestre

Gabarito 1ª Prova **2013**
Data: Quinta-feira, 23 de Janeiro **Turma A3**

Exercício 1 *Desejamos calcular a integral*

$$I = \iint_{\Omega} \left(\sqrt{x - 2y} + \frac{1}{4} y^2 \right) dx\, dy$$

onde Ω é o triângulo esboçado na figura abaixo



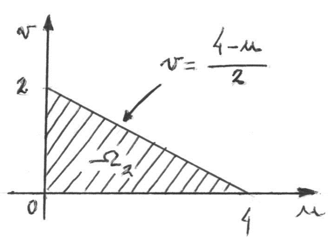
Para isto, considere a seguinte mudança de variáveis

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = x - 2y \\ v = y \end{cases} \Leftrightarrow \varphi : \begin{cases} x = u + 2v \\ y = v \end{cases},$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = 1$$

e, neste novo referencial, o conjunto Ω torna-se



$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \le u \le 4 \\ 0 \le v \le \dfrac{4-u}{2} \end{cases}$$

e, disto segue-se que

$$I = \iint_{\Omega_2} \left(\sqrt{u} + \frac{1}{4} v^2 \right) du\, dv$$

$$= \int_0^4 \int_0^{\frac{4-u}{2}} \left(\sqrt{u} + \frac{1}{4} v^2 \right) dv\, du$$

$$= \int_0^4 \sqrt{u} v + \frac{1}{12} v^3 \Big|_0^{\frac{4-u}{2}} dv\, du$$

$$= \int_0^4 \left(-\frac{u^3}{96} + \frac{u^2}{8} - \frac{u}{2} + 2u^{\frac{1}{2}} - \frac{u^{\frac{3}{2}}}{2} + \frac{2}{3} \right) du$$

$$= \frac{74}{15}$$

■

Exercício 2

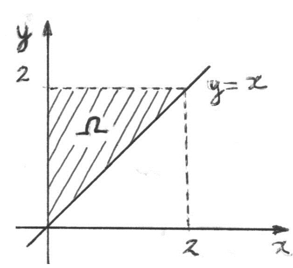
a). *Desejamos calcular a integral*

$$I = \int_0^2 \int_x^2 2y^2 \operatorname{sen}(xy)\, dy\, dx$$

Para isto, observe que o domínio de integração é

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ x \le y \le 2 \end{cases}$$

cujo gráfico pode ser esboçado da seguinte maneira



Observe porém, que o conjunto Ω pode também ser descrito da seguinte maneira

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Ou seja,

$$I = \int_0^2 \int_0^y 2y^2 \text{sen}(xy)\, dx\, dy$$

$$= -\int_0^2 2y\, \cos(xy) \Big|_0^y dy$$

$$= -\int_0^2 2y \left[\cos(y^2) - 1\right] dy$$

$$= -\,\text{sen}(y^2) + y^2 \Big|_0^2$$

$$= 4 - \text{sen}\, 4$$

□

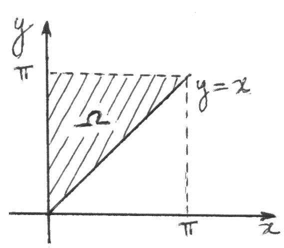
b). *Desejamos agora, calcular a seguinte integral*

$$\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\text{sen}\, y}{y} dy\, dx$$

De modo semelhante ao que foi feito no item anterior, observe que o domínio de integração é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \\ x \leq y \leq \pi \end{cases}$$

cujo esboço é dado pela seguinte figura



Observe que o conjunto Ω pode também ser descrito na forma

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$$

Assim,

$$\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\text{sen}\, y}{y} dy\, dx = \int_0^\pi \int_0^y \frac{\text{sen}\, y}{y} dx\, dy$$

$$= \int_0^\pi \frac{\text{sen}\, y}{y}\; x \Big|_0^y dy$$

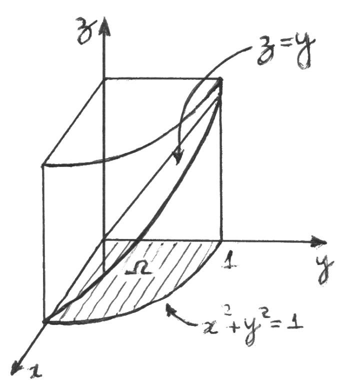
$$= \int_0^\pi \frac{\text{sen}\, y}{y} y\, dy$$

$$= -\cos\, y \Big|_0^\pi$$

$$= 2$$

■

Exercício 3 *Esboçando o sólido em questão, temos a seguinte figura*



donde segue-se que o volume procurado é dado por

$$V = \iint_\Omega f(x,y) dx\, dy$$

onde Ω é o conjunto dos pontos (x, y) tais que $x^2 + y^2 \leq 1$ com $x \geq 0$ e $y \geq 0$ e

$$f(x, y) = y$$

Usando coordenadas polares, tome

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r$$

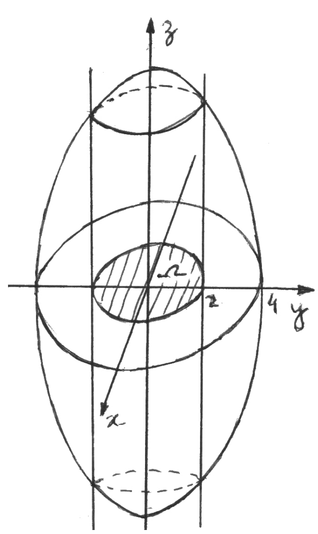
e, neste sistema de coordenadas, o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\Omega} y dx\, dy \\ &= \iint_{\Omega_2} r \operatorname{sen}\theta\, r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\theta\, r^3 \Big|_0^1 d\theta \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \\ &= -\frac{1}{3}\cos\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Esboçando o sólido descrito no problema, obtemos a seguinte figura*



segue-se portanto, que o volume V deste sólido é dado por

$$V = \iint_{\Omega} f(x, y) dx\, dy$$

onde Ω é o conjuntos dos pontos (x, y) tais que

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

e

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2\sqrt{64 - 4x^2 - 4y^2} \\ &= 2\sqrt{4\,(16 - x^2 - y^2)} \\ &= 4\sqrt{16 - x^2 - y^2} \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares, tome

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r$$

e, neste sistema de coordenadas, o conjunto Ω torna-se

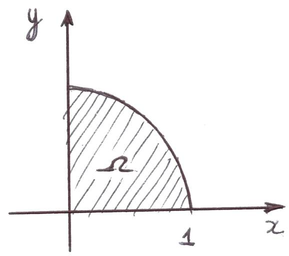
$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 2 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\Omega} 4\sqrt{16 - x^2 - y^2} dx\, dy \\ &= \iint_{\Omega_2} 4r\sqrt{16 - r^2} dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 4r\sqrt{16 - r^2} dr\, d\theta \\ &= -\frac{4}{3}\int_0^{2\pi} \left(16 - r^2\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 d\theta \\ &= -\left(32\sqrt{3} - \frac{256}{3}\right)\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{512}{3}\pi - 64\pi\sqrt{3} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Observe que a lâmina que tem a forma da região no primeiro quadrante, do disco $x^2+y^2 \leq 1$ possui o seguinte esboço*



Sendo a densidade dessa lâmina em cada ponto (x,y) diretamente proporcional à distância deste ponto à origem, ou seja

$$\delta(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2}$$

sua massa será dada por

$$M = \iint_{\Omega} \delta(x,y)dx\,dy$$

Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r$$

o conjunto Ω, neste sistema de coordenadas, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} M &= \iint_{\Omega_2} k\,r^2 dr\,d\theta \\ &= k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^2 dr\,d\theta \\ &= \frac{k}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\Big|_0^1 d\theta \\ &= \frac{k}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \frac{k\pi}{6} \end{aligned}$$

E, o centro de massa, será (x_c, y_c) onde

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{M}\iint_{\Omega} x\delta(x,y)dx\,dy \\ &= \frac{6}{k\pi}\iint_{\Omega} kx\sqrt{x^2+y^2}dx\,dy \\ &= \frac{6}{\pi}\iint_{\Omega_2} r\cos\theta\, r^2 dr\,d\theta \\ &= \frac{6}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^3\cos\theta\,dr\,d\theta \\ &= \frac{6}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, r^4\Big|_0^1 d\theta \\ &= \frac{6}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta \\ &= \frac{6}{4\pi}\,\mathrm{sen}\,\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2\pi} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{1}{M}\iint_{\Omega} y\delta(x,y)dx\,dy \\ &= \frac{6}{k\pi}\iint_{\Omega} ky\sqrt{x^2+y^2}dx\,dy \\ &= \frac{6}{\pi}\iint_{\Omega_2} r\,\mathrm{sen}\,\theta\, r^2 dr\,d\theta \\ &= \frac{6}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^3\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta \\ &= \frac{6}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}\,\theta\, r^4\Big|_0^1 d\theta \\ &= \frac{6}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}\,\theta\,d\theta \\ &= -\frac{6}{4\pi}\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2\pi} \end{aligned}$$

concluímos, com isto, que o centro de massa da lâmina dada é o ponto $\left(\dfrac{3}{2\pi}, \dfrac{3}{2\pi}\right)$. ■