Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito Prova Final **2013**
Data: 25 de Março de 2014 **Turma 13**

Exercício 1

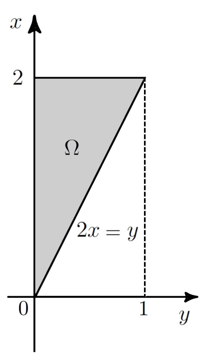
a). *Desejamos calcular a integral*

$$\int_0^1 \int_{2x}^2 e^{y^2} dy\, dx$$

Para isto, observe que o domínio de integração é

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 2x \leq y \leq 2 \end{cases}$$

cujo gráfico pode ser esboçado da seguinte maneira



Observe que o conjunto Ω *também pode ser expresso da seguinte forma*

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq \dfrac{y}{2} \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{2x}^2 e^{y^2} dy\, dx &= \int_0^2 \int_0^{\frac{y}{2}} e^{y^2} dx\, dy \\ &= \int_0^2 e^{y^2} x \Big|_0^{\frac{y}{2}} dy \\ &= \int_0^2 \frac{y}{2} e^{y^2} dy \\ &= \frac{e^{y^2}}{4} \Big|_0^2 \\ &= \frac{e^4 - 1}{4} \end{aligned}$$

$\square$

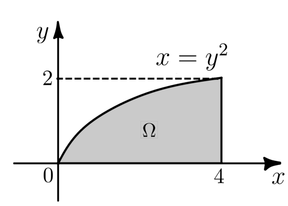
b). *Desejamos agora, calcular a integral*

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 y \cos\left(x^2\right) dx\, dy$$

Observe, no entanto, que seu domínio de integração é dado por

$$\Omega : \begin{cases} y^2 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

que está esboçado na seguinte figura



Disto segue-se que Ω *também pode ser expresso da seguinte maneira*

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{x} \end{cases}$$

Ou seja,

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 y\cos\left(x^2\right) dx\, dy = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} y\cos\left(x^2\right) dy\, dx$$

$$= \int_0^4 \frac{y^2}{2}\cos\left(x^2\right)\Big|_0^{\sqrt{x}} dx$$

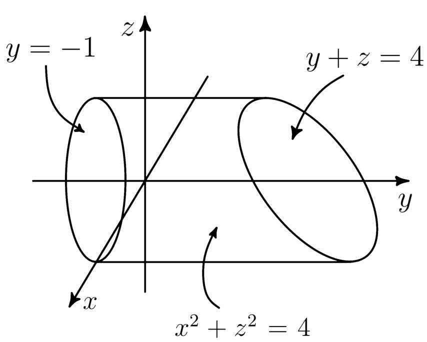
$$= \int_0^4 \frac{x}{2}\cos\left(x^2\right)\, dx$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\left(x^2\right)}{4}\Big|_0^4$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(16)}{4}$$

■

Exercício 2 *Realizando um esboço do sólido em questão, obtemos a seguinte figura*



Portanto, o volume procurado é dado por

$$V = \iiint_\Omega dx\, dy\, dz$$

Usando coordenadas cilíndricas, ou seja

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = y \\ z = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano e

$$J = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,y,\theta)}\right| = r$$

o sólido em questão pode ser expresso, neste novo referencial, por

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ -1 \le y \le 4 - r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Portanto,

$$V = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{4-r\operatorname{sen}\theta} r\, dy\, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} ry\Big|_{-1}^{4-r\operatorname{sen}\theta} d\theta\, dr$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r\left(4 - r\operatorname{sen}\theta + 1\right) d\theta\, dr$$

$$= \int_0^2 \left(5r\theta + r\cos\theta\right)\Big|_0^{2\pi} dr$$

$$= \int_0^2 10\pi r\, dr$$

$$= 5\pi r^2\Big|_0^2$$

$$= 20\pi$$

■

(Outro modo): *Perceba que o sólido em questão trata-se de um cilindro cortado obliquamente. Desta forma, se colocarmos dois deles formando um maior, conforme a figura abaixo*

figure

teremos um cilindro com o dobro do volume que desejamos encontrar. Ou seja

$$V = \frac{(\acute{A}rea\, da\, base)(Altura\, menor + Altura\, maior)}{2}$$

$$= \frac{4\pi\,(3+7)}{2}$$

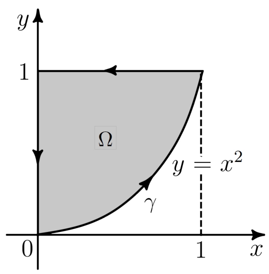
$$= 20\pi$$

■

Exercício 3 *Desejamos calcular*

$$I = \oint_\gamma x^2 y^2 dx + xy dy$$

Realizando um esboço da região delimitada pelas curvas dadas, obtemos a seguinte figura



Como trata-se de uma curva fechada, o ***Teorema de Green*** *nos garante que*

$$I = \iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y^2\right) \right] dx\, dy$$

onde

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Ou seja

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^1 \left(y - 2x^2 y\right) dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{y^2}{2} - x^2 y^2 \Big|_{x^2}^1 dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x^2 - \frac{x^4}{2} + x^6 \right) dx$$

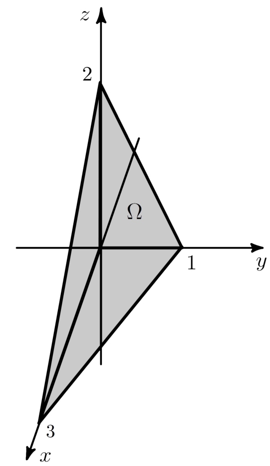
$$= \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{10} + \frac{x^7}{7} \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{10} + \frac{1}{7}$$

$$= \frac{22}{105}$$

■

Exercício 4 *Observe que a região dada possui o seguinte esboço*



Desta forma, segue-se que o fluxo que desejamos calcular será

$$\tau = \iint_\sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Como se trata de uma região fechada, o ***Teorema da Divergência*** *nos garante que*

$$\iint_\sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F}\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_\Omega \left[\frac{\partial (6x)}{\partial x} + \frac{\partial (3y)}{\partial y} + \frac{\partial (2x)}{\partial z} \right] dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_\Omega (6 + 3)\, dx\, dy\, dz$$

$$= 9 \iiint_\Omega dx\, dy\, dz$$

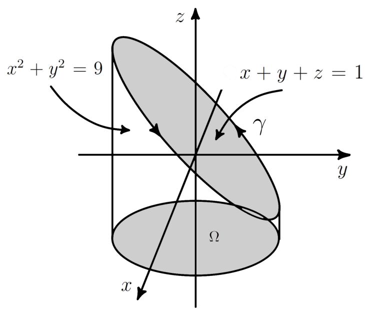
$$= 9\, \text{Volume}(\Omega)$$

Como Ω é um tetraedro, segue-se que

$$\iint_\sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = 9 \frac{1}{3} \frac{3 \cdot 1}{2} 2 = 9$$

■

Exercício 5 *Realizando um esboço da região em questão obtemos a seguinte figura*



Observe que

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = (0, x^2, y^2)$$

e a superfície σ em questão, pode ser parametrizada da seguinte forma

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - u - v \end{cases} ; \underbrace{u^2 + v^2 \leq 9}_{\Omega}$$

Ou seja

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = (1, 0, -1)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = (0, 1, -1)$$

e

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = (1, 1, 1)$$

Logo,

$$n = \frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|}$$

Assim, usando o ***Teorema de Stokes****, temos que*

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\Gamma = \iint_{\sigma} \operatorname{rot}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$= \iint_{\Omega} \operatorname{rot}\mathbf{F}\,(\sigma(u,v)) \cdot \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} \sqrt{3} du\, dv$$

$$= \iint_{\Omega} \operatorname{rot}\mathbf{F}\,(u, v, 1 - u - v) \cdot (1,1,1) du\, dv$$

$$= \iint_{\Omega} (0, u^2, v^2)(1,1,1) du\, dv$$

$$= \iint_{\Omega} \left(u^2 + v^2\right) du\, dv$$

Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$J = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| = r$$

O conjunto Ω, neste referencial, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

e disto, segue-se que

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\Gamma = \int_0^3 \int_0^{2\pi} r^2 r d\theta\, dr$$

$$= \int_0^3 r^3 \theta \Big|_0^{2\pi} dr$$

$$= 2\pi \int_0^3 r^3 dr$$

$$= \frac{\pi r^4}{2} \Big|_0^3$$

$$= \frac{81\pi}{2}$$

■