

Universidade Federal do Vale do São Francisco  
Engenharia Civil  
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Edson

2º Semestre

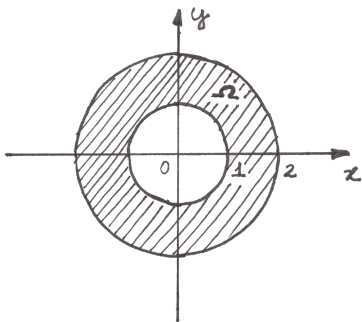
Gabarito 3ª Prova  
Data: Quinta-feira, 7 de Abril

2013  
Turma 13

**Exercício 1** Considere

$$I = \oint_{\gamma} (x+y)dx + (y+x^2)dy$$

Observe na figura abaixo que a curva  $\gamma$  e o conjunto  $\Omega$  que consiste no interior de  $\gamma$ , obedecem às condições necessárias ao uso do **Teorema de Green**.



E assim, usando-o, teremos que

$$I = \iint_{\Omega} (2x - 1) dx dy$$

Onde  $\Omega$  é o conjunto de todos os  $(x, y)$  tais que  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ . Usando coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

cujos jacobiano é dado por

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = r$$

o conjunto  $\Omega$  torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

e disto segue-se que

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 (2r \cos \theta - 1) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{2}{3} r^3 \cos \theta - \frac{1}{2} r^2 \right) \Big|_1^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{14}{3} \cos \theta - \frac{3}{2} \right) d\theta \\ &= \left( \frac{14}{3} \sin \theta - \frac{3}{2} \theta \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= -3\pi \end{aligned}$$

■

**Exercício 2** Sabemos que

$$\mathbf{F}(x, y) = e^x \cos y \mathbf{i} - e^x \sin y \mathbf{j}$$

Observe que,

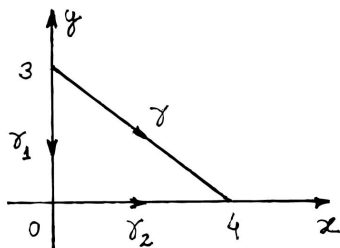
$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F}(x, y) &= \frac{\partial(-e^x \sin y)}{\partial x} - \frac{\partial(e^x \cos y)}{\partial y} \\ &= -e^x \sin y + e^x \sin y \\ &= 0 \end{aligned}$$

e além disso

$$D_{\mathbf{F}} = \mathbb{R}^2 \text{ (simplesmente conexo)}$$

Portanto  $\mathbf{F}$  é um campo conservativo em  $\mathbb{R}^2$  e, com isto, a integral que desejamos calcular é independente do caminho. Considere então o caminho

$$\bar{\gamma} = \gamma_1 \cup \gamma_2$$



onde

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 - t \end{cases} ; 0 \leq t \leq 3$$

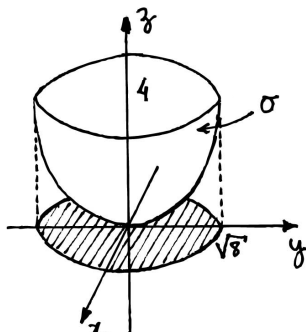
$$\gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} ; 0 \leq t \leq 4$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma &= \int_{\bar{\gamma}} \mathbf{F} \cdot d\bar{\gamma} \\ &= \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\gamma_1 + \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\gamma_2 \\ &= \int_0^3 \mathbf{F}(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt + \int_0^4 \mathbf{F}(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt \\ &= \int_0^3 \mathbf{F}(0, 3-t) \cdot (0, -1) dt + \int_0^4 \mathbf{F}(t, 0) \cdot (1, 0) dt \\ &= \int_0^3 \sin(3-t) dt + \int_0^4 e^t dt \\ &= \cos(3-t) \Big|_0^3 + e^t \Big|_0^4 = e^4 - \cos 3 \end{aligned}$$

■

**Exercício 3** Realizando um esboço da superfície em questão temos a seguinte figura



Uma parametrização possível desta superfície é dada por

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \end{cases} ; \underbrace{u^2 + v^2}_{\Omega} \leq 8$$

e, sua área pode ser obtida através da seguinte integral

$$\begin{aligned} A &= \iint_{\sigma} dS \\ &= \iint_{\Omega} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du dv \end{aligned}$$

Observe porém que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = (1, 0, u)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = (0, 1, v)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = (-u, -v, 1)$$

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| = \sqrt{u^2 + v^2 + 1}$$

ou seja

$$A = \iint_{\Omega} \sqrt{u^2 + v^2 + 1} du dv$$

Usando coordenadas polares

$$\begin{cases} u = r \cos \theta \\ v = r \sin \theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(r, \theta)} \right| = r$$

o conjunto  $\Omega$  torna-se

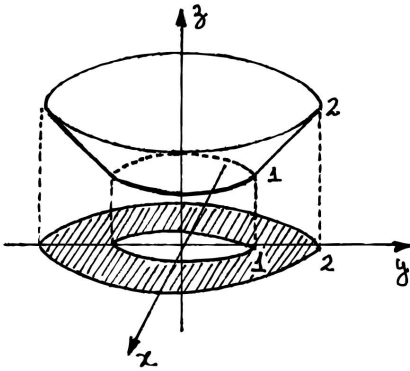
$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{8} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

e disto segue-se que

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{8}} r \sqrt{r^2 + 1} dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^9 \frac{1}{2} \sqrt{w} dw d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} \sqrt{w^3} \Big|_1^9 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{26}{3} d\theta \\ &= \frac{52\pi}{3} \end{aligned}$$

■

**Exercício 4** Um esboço possível da superfície em questão é dado pela figura abaixo



e, uma parametrização possível para esta superfície é

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{u^2 + v^2} \end{cases} ; \underbrace{1 \leq u^2 + v^2 \leq 4}_{\Omega}$$

Observe que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \left( 1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left( 0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left( \frac{-u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, 1 \right)$$

Como estamos interessados no vetor normal que aponta para baixo (componente  $z$  negativa), segue-se que

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial v} \times \frac{\partial \sigma}{\partial u}}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial v} \times \frac{\partial \sigma}{\partial u} \right\|}$$

e assim, segue-se que

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_{\Omega} \mathbf{F}(\sigma(u, v)) \cdot \mathbf{n} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial v} \times \frac{\partial \sigma}{\partial u} \right\| du dv \\ &= \iint_{\Omega} \mathbf{F}(\sigma(u, v)) \cdot \left( \frac{\partial \sigma}{\partial v} \times \frac{\partial \sigma}{\partial u} \right) du dv \\ &= \iint_{\Omega} \left( \frac{u+v}{\sqrt{u^2 + v^2}} - 1 \right) du dv \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} u = r \cos \theta \\ v = r \sin \theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(r, \theta)} \right| = r$$

o conjunto  $\Omega$  torna-se

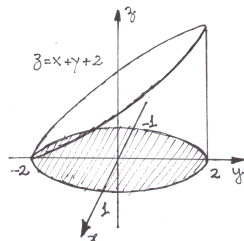
$$\Omega_2 : \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

e com isto, temos que

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_{\Omega_2} \left( \frac{r \cos \theta + r \sin \theta}{r} - 1 \right) r dr d\theta \\ &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} (r \cos \theta + r \sin \theta - r) d\theta dr \\ &= \int_1^2 (r \sin \theta - r \cos \theta - r\theta) \Big|_0^{2\pi} dr \\ &= \int_1^2 -2\pi r dr \\ &= -\pi r^2 \Big|_1^2 \\ &= -3\pi \end{aligned}$$

■

**Exercício 5** A curva correspondente à fronteira da superfície em questão (orientada no sentido contrário ao que queremos) pode ser parametrizada da seguinte maneira



$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \\ z(t) = \cos t + 2 \sin t + 2 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

e, usando o **Teorema de Stokes**, segue-se que

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= - \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\Gamma \\ &= - \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\Gamma(t)) \cdot \Gamma'(t) \, dt \\ &= - \int_0^{2\pi} (3 \cos^2 t \sin t + 2 \cos t (1 - \sin t) \\ &\quad + 8 \cos^2 t - 4 \sin^2 t \cos t - 2) \, dt \\ &= -4\pi \end{aligned}$$

□

**(Outro modo de se resolver este exercício)**

Uma parametrização possível para a superfície em questão seria

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u + v + 2 \end{cases}; \quad \underbrace{u^2 + \frac{v^2}{4} \leq 1}_{\Omega}$$

Observe que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = (1, 0, 1)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = (0, 1, 1)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = (-1, -1, 1)$$

Como estamos interessados no vetor normal apontando para baixo segue-se que

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial v} \times \frac{\partial \sigma}{\partial u}}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial v} \times \frac{\partial \sigma}{\partial u} \right\|}$$

Observe, que, sendo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$$

teremos

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = -z\mathbf{j}$$

e, disto segue-se que

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_{\Omega} \text{rot } \mathbf{F}(\sigma(u, v)) \cdot \left( \frac{\partial \sigma}{\partial v} \times \frac{\partial \sigma}{\partial u} \right) \, du \, dv \\ &= \iint_{\Omega} (0, -u-v-2, 0) \cdot (1, 1, -1) \, du \, dv \\ &= \iint_{\Omega} (-u - v - 2) \, du \, dv \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares,

$$\begin{cases} u = r \cos \theta \\ v = 2r \sin \theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(r, \theta)} \right| = 2r$$

o conjunto  $\Omega$  torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

e com isto, temos que

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_{\Omega_2} (-r \cos \theta - 2r \sin \theta - 2) |J| \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (-2r^2 \cos \theta - 4r^2 \sin \theta - 4r) \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^1 (-2r^2 \sin \theta + 4r^2 \cos \theta - 4r\theta) \Big|_0^{2\pi} \, dr \\ &= \int_0^1 -8\pi r \, dr \\ &= -4\pi \end{aligned}$$

■