

Universidade Federal do Vale do São Francisco  
Engenharia Civil  
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Edson

2º Semestre

Gabarito 2ª Prova  
Data: Domingo, 9 de Setembro

2013  
Turma 13

**Exercício 1** Desejamos calcular a integral

$$I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x+y} \sqrt[3]{x+2y-z} \, dx \, dy \, dz$$

Para isto, considere a seguinte mudança de variáveis

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = x + y \\ v = x + 2y - z \\ w = z \end{cases}$$

Observe que

$$\varphi : \begin{cases} x = 2u - v - w \\ y = -u + v + w \\ z = w \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = 1$$

e, neste referencial, o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} 1 \leq x + y \leq 2 \\ 0 \leq x + 2y - z \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 1 \leq u \leq 2 \\ 0 \leq v \leq 1 \\ 0 \leq w \leq 1 \end{cases}$$

Portanto, segue-se que

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega_2} \sqrt{u} \sqrt[3]{v} |J| \, du \, dv \, dw \\ &= \int_1^2 \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{u} \sqrt[3]{v} \, dw \, dv \, du \\ &= \int_1^2 \int_0^1 \sqrt{u} \sqrt[3]{v} \, dv \, du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_1^2 \int_0^1 \sqrt{u} \sqrt[3]{v} \, dv \, du \\ &= \int_1^2 \frac{3}{4} \sqrt{u} v^{\frac{4}{3}} \Big|_0^1 \, du \\ &= \int_1^2 \frac{3}{4} \sqrt{u} \, du \\ &= \frac{1}{2} u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{8} - 1) = \sqrt{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

■

**Exercício 2**

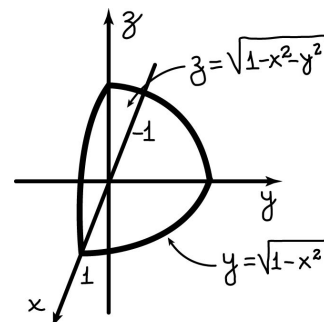
a). Desejamos calcular a integral

$$A = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \, dz \, dy \, dx$$

Para isto, observe que o domínio de integração é

$$\Omega : \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$$

cujo gráfico pode ser esboçado da seguinte maneira



Usando coordenadas esféricas, ou seja

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} \right| = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi$$

O conjunto  $\Omega$  torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

e disto, segue-se que

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-(\rho^2)^{\frac{3}{2}}} |J| \, d\varphi \, d\theta \, d\rho \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^3} \rho^2 \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi -e^{-\rho^3} \rho^2 \cos \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \, d\theta \, d\rho \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi e^{-\rho^3} \rho^2 \, d\theta \, d\rho \\ &= \int_0^1 e^{-\rho^3} \rho^2 \theta \Big|_0^\pi \, d\rho \\ &= \pi \int_0^1 e^{-\rho^3} \rho^2 \, d\rho \\ &= \frac{\pi}{3} \left( 1 - \frac{1}{e} \right) \end{aligned}$$

□

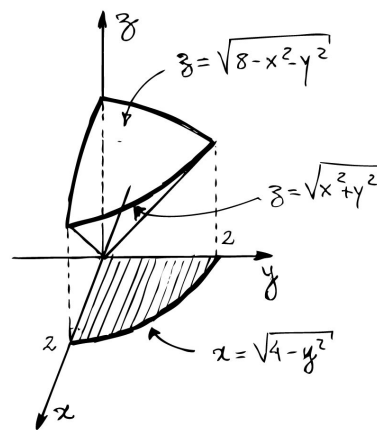
b). Desejamos agora, calcular a seguinte integral

$$B = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2 \, dz \, dx \, dy$$

e, o domínio de integração, neste caso é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{4-y^2} \\ 0 \leq y \leq 2 \\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{8-x^2-y^2} \end{cases}$$

cujo esboço é dado pela seguinte figura



Usando coordenadas esféricas, ou seja

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} \right| = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi$$

o conjunto  $\Omega$ , neste referencial, torna-se

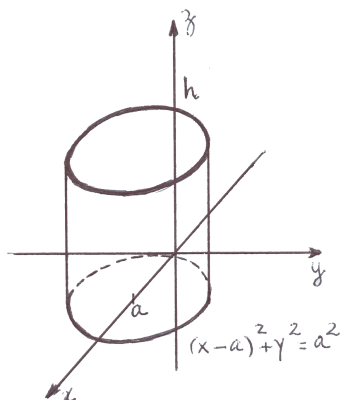
$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{8} \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Assim, segue-se que

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{8}} \rho^2 \cos^2 \varphi |J| \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{8}} \rho^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin \varphi \left. \frac{\rho^5}{5} \right|_0^{\sqrt{8}} \, d\theta \, d\varphi \\
&= \frac{128\sqrt{2}}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\theta \, d\varphi \\
&= \frac{128\sqrt{2}\pi}{10} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \\
&= -\frac{64\pi\sqrt{2}}{15} \cos^3 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= -\frac{64\pi\sqrt{2}}{15} \left( \frac{1-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \right) \\
&= \frac{32\pi}{15} (2\sqrt{2} - 1)
\end{aligned}$$

**Exercício 3** Um esboço possível para o sólido em questão é dado na figura abaixo



A distância de um ponto qualquer  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  à reta  $x = a, y = 0$ , é dada por

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

e, o momento de inércia procurado é então

$$I = \iiint_{\Omega} r^2 \delta \, dx \, dy \, dz$$

onde  $\delta(x, y, z) = k, k \in \mathbb{R}$ , é a densidade do sólido dado.

Usando coordenadas cilíndricas com centro no ponto  $(a, 0, 0)$ , ou seja

$$\begin{cases} x = a + \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r$$

o conjunto  $\Omega$  torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq a \\ 0 \leq z \leq h \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_{\Omega_2} \rho^2 k |J| \, dr \, d\theta \, dz \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^a k \rho^3 \, d\rho \, dz \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^h k \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_0^a \, dz \, d\theta \\
&= \frac{ka^4}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^h dz \, d\theta \\
&= \frac{ka^4}{4} \int_0^{2\pi} z \Big|_0^h \, d\theta \\
&= \frac{ka^4 h}{4} \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{k\pi a^4 h}{2}
\end{aligned}$$

**Exercício 4** O trecho da parábola  $x = y^2 + 1$  do ponto  $(1, 0)$  ao ponto  $(2, 1)$  pode ser parametrizado da seguinte forma

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t^2 + 1 \\ y(t) = t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

e o trabalho em questão, é dado por

$$\tau = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma$$

onde

$$\mathbf{F}(x, y) = x^2 \mathbf{i} + ye^x \mathbf{j}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \tau &= \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^1 \mathbf{F}(t^2 + 1, t) \cdot (2t, 1) dt \\ &= \int_0^1 \left( (t^2 + 1)^2, te^{t^2+1} \right) \cdot (2t, 1) dt \\ &= \int_0^1 \left[ 2t(t^2 + 1)^2 + te^{t^2+1} \right] dt \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{e}{2} + \frac{7}{3} \end{aligned}$$

■

**Exercício 5** Sendo a parametrização da hélice, dada por

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \cos t \\ z(t) = \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

e, a densidade em qualquer ponto deste arame o quadrado da distância do ponto à origem, ou seja de densidade homogênea

$$\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

teremos, que sua massa, é

$$\begin{aligned} M &= \int_{\gamma} \delta(x, y) ds \\ &= \int_0^{2\pi} \delta(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} (t^2 + 1) \sqrt{2} dt \\ &= \sqrt{2} \left( \frac{t^3}{3} + t \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \sqrt{2} \left( \frac{8\pi^3}{3} + 2\pi \right) \end{aligned}$$

■