

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Edson

2º Semestre

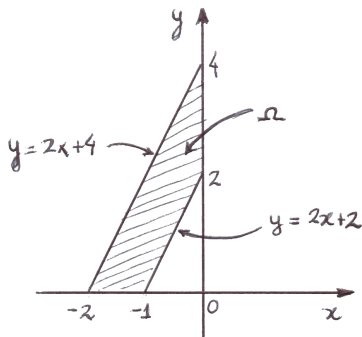
Gabarito 1ª Prova
Data: Domingo, 19 de Janeiro

2013
Turma 13

Exercício 1 Desejamos calcular a integral

$$\iint_{\Omega} \frac{2y+x}{y-2x} dx dy$$

onde Ω é o trapézio esboçado na figura abaixo



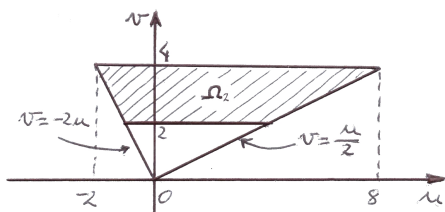
Para isto, considere a seguinte mudança de variáveis

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = 2y + x \\ v = y - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \varphi : \begin{cases} x = \frac{u - 2v}{5} \\ y = \frac{2u + v}{5} \end{cases},$$

cujos jacobiano é dado por

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{1}{5}$$

e, neste novo sistema de coordenadas, o conjunto Ω torna-se



$$\Omega_2 : \begin{cases} -\frac{v}{2} \leq u \leq 2v \\ 2 \leq v \leq 4 \end{cases}$$

e, disto segue-se que

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{2y+x}{y-2x} dx dy &= \iint_{\Omega_2} \frac{u}{v} \frac{1}{5} du dv \\ &= \frac{1}{5} \int_2^4 \int_{-\frac{v}{2}}^{2v} \frac{u}{v} du dv \\ &= \frac{1}{5} \int_2^4 \frac{u^2}{2v} \Big|_{-\frac{v}{2}}^{2v} dv \\ &= \frac{1}{10} \int_2^4 \left(4v - \frac{v}{4}\right) dv \\ &= \frac{3}{16} v^2 \Big|_2^4 \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

■

Exercício 2

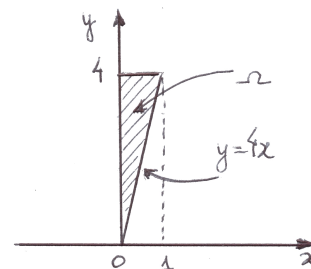
a). Desejamos calcular a integral

$$\int_0^1 \int_{4x}^4 e^{-y^2} dy dx$$

Para isto, observe que o domínio de integração é

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 4x \leq y \leq 4 \end{cases}$$

cujos gráfico pode ser esboçado da seguinte maneira



Observe porém, que o conjunto Ω pode também ser descrito da seguinte maneira

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{y}{4} \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{4x}^4 e^{-y^2} dy dx &= \int_0^4 \int_0^{\frac{y}{4}} e^{-y^2} dx dy \\ &= \int_0^4 e^{-y^2} x \Big|_0^{\frac{y}{4}} dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^4 y e^{-y^2} dy \\ &= -\frac{1}{8} e^{-y^2} \Big|_0^4 \\ &= \frac{1}{8} (1 - e^{-16}) \end{aligned}$$

□

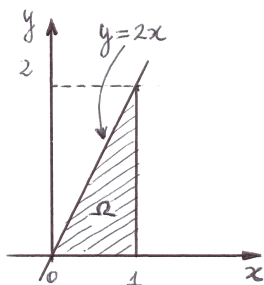
b). Desejamos agora, calcular a seguinte integral

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 \cos(x^2) dx dy$$

De modo semelhante ao que foi feito no item anterior, observe que o domínio de integração é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} \frac{y}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

cujo esboço é dado pela seguinte figura



Observe que o conjunto Ω pode também ser descrito na forma

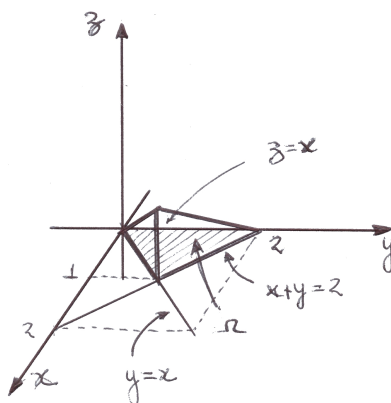
$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2x \end{cases}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 \cos(x^2) dx dy &= \int_0^1 \int_0^{2x} \cos(x^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \cos(x^2) y \Big|_0^{2x} dx \\ &= \int_0^1 2x \cos(x^2) dx \\ &= \operatorname{sen}(x^2) \Big|_0^1 \\ &= \operatorname{sen} 1 \end{aligned}$$

■

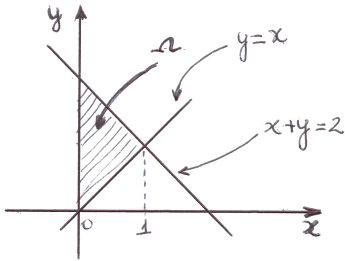
Exercício 3 Esboçando o sólido em questão, temos a seguinte figura



donde segue-se que o volume procurado é dado por

$$V = \iiint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

onde



$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 2-x \end{cases}$$

e

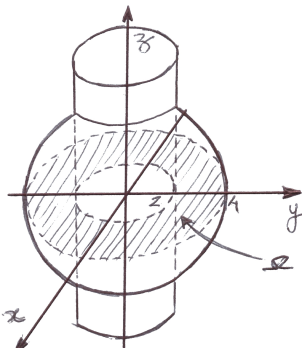
$$f(x, y) = x$$

ou seja,

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\Omega} x dx dy \\ &= \int_0^1 \int_x^{2-x} x dy dx \\ &= \int_0^1 xy \Big|_x^{2-x} dx \\ &= 2 \int_0^1 (x - x^2) dx \\ &= 2 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 Esboçando o sólido descrito no problema, obtemos a seguinte figura



segue-se portanto, que o volume V deste sólido é dado por

$$V = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

onde Ω é o conjunto dos pontos (x, y) tais que

$$4 \leq x^2 + y^2 \leq 16$$

e

$$f(x, y) = 2\sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

Usando coordenadas polares, tome

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

cujos jacobiano é

$$|J| = r$$

e, neste sistema de coordenadas, o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 2 \leq r \leq 4 \end{cases}$$

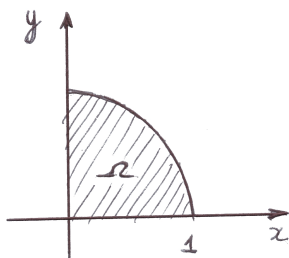
Logo,

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\Omega} 2\sqrt{16 - x^2 - y^2} dx dy \\ &= \iint_{\Omega_2} 2r\sqrt{16 - r^2} dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_2^4 2r\sqrt{16 - r^2} dr d\theta \\ &= -\frac{2}{3} \int_0^{2\pi} (16 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_2^4 d\theta \\ &= 16\sqrt{3} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 32\sqrt{3}\pi \end{aligned}$$

■

Exercício 5 Observe que a lâmina que tem a forma da região no primeiro quadrante, do disco $x^2 + y^2 \leq 1$

possui o seguinte esboço



Sendo a densidade dessa lâmina em cada ponto (x, y) diretamente proporcional à distância deste ponto ao eixo x , ou seja

$$\delta(x, y) = ky$$

sua massa será dada por

$$M = \iint_{\Omega} \delta(x, y) dx dy$$

Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r$$

o conjunto Ω , neste sistema de coordenadas, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} M &= \iint_{\Omega_2} k r \sin \theta r dr d\theta \\ &= k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 \sin \theta dr d\theta \\ &= \frac{k}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta r^3 \Big|_0^1 d\theta \\ &= \frac{k}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \\ &= -\frac{k}{3} \cos \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{k}{3} \end{aligned}$$

E, o centro de massa, será (x_c, y_c) onde

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{M} \iint_{\Omega} x \delta(x, y) dx dy \\ &= \frac{3}{k} \iint_{\Omega} kxy dx dy \\ &= 3 \iint_{\Omega_2} r \cos \theta r \sin \theta r dr d\theta \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 \sin \theta \cos \theta dr d\theta \\ &= \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta r^4 \Big|_0^1 d\theta \\ &= \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= \frac{3}{8} \sin^2 \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{1}{M} \iint_{\Omega} y \delta(x, y) dx dy \\ &= \frac{3}{k} \iint_{\Omega} ky^2 dx dy \\ &= 3 \iint_{\Omega_2} r^2 \sin^2 \theta r dr d\theta \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 \sin^2 \theta dr d\theta \\ &= \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta r^4 \Big|_0^1 d\theta \\ &= \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \frac{3\pi}{16} \end{aligned}$$

Assim, concluímos que o centro de massa é o ponto $\left(\frac{3}{8}, \frac{3\pi}{16}\right)$. ■