

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito Prova Final
Data: Sexta-feira, 04 de Outubro

2013
Turma M3

Exercício 1 Após realizarmos um esboço do tetraedro em questão, concluímos que seu volume é dado por

$$V = \iint_K (2 - x - 2y) dx dy$$

onde

$$K = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x}{2} \leq y \leq \frac{2-x}{2} \end{cases}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-x}{2}} (2 - x - 2y) dy dx \\ &= \int_0^1 (2y - xy - y^2) \Big|_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-x}{2}} dx \\ &= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Exercício 2 Desejamos calcular

$$I = \iiint_{\Omega} x e^{x^2+y^2+z^2} dx dy dz$$

Usando coordenadas esféricas

$$\sigma : \begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} \right| = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi$$

o conjunto dado, neste referencial, pode ser descrito

como

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Assim

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta e^{\rho^2} \rho^2 \operatorname{sen} \varphi d\theta d\varphi d\rho \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 e^{\rho^2} \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \theta d\theta d\varphi d\rho \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 e^{\rho^2} \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen} \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi d\rho \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 e^{\rho^2} \operatorname{sen}^2 \varphi d\varphi d\rho \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 e^{\rho^2} \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) \varphi d\varphi d\rho \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho^3 e^{\rho^2} \left(\varphi - \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\rho \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 \rho^3 e^{\rho^2} d\rho \\ &= \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Exercício 3 Observe que

$$\mathbf{E}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

onde

$$P(x, y) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e

$$Q(x, y) = \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e, além disto, perceba que

$$\begin{aligned} \text{Rot } \mathbf{E} &= \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \\ &= \frac{-3xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Disto segue-se que o campo vetorial \mathbf{E} será conservativo em qualquer conjunto $\Omega \in \mathbb{R}^2$ onde $(0, 0) \notin \Omega$. Assim, a integral que desejamos calcular é independente de caminho. Portanto escolheremos outro caminho que tenha os mesmos ponto de início e final da curva γ . Para isto considere a curva

$$\gamma_2 : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}; \pi \leq t \leq 2\pi$$

Portanto, segue-se que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\gamma &= \int_{\gamma_2} \mathbf{E} \cdot d\gamma_2 \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} \mathbf{E}(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} \mathbf{E}(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} (\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^1 0 dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exercício 4 Usando o Teorema de Green, temos que

$$\begin{aligned} I &= \int_{\gamma} x e^{-2x} dx + (x^4 + 2x^2 y^2) dy \\ &= \iint_K \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^4 + 2x^2 y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x e^{-2x}) \right] dx dy \\ &= \iint_K 4x(x^2 + y^2) dx dy \end{aligned}$$

onde

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Usando coordenadas polares,

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

temos que

$$|J| = r$$

e, o conjunto K será transformado no conjunto

$$K' : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 1 \leq r \leq 2 \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned} I &= \iint_K 4x(x^2 + y^2) dx dy \\ &= \iint_{K'} 4r \cos \theta r^2 r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 4 \cos \theta r^4 dr d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exercício 5 O teorema de Stokes enuncia que

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma = \iint_{\sigma} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$$

onde, em nosso caso, σ é a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Uma parametrização possível para a curva que consiste da fronteira de σ seria

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \sqrt{3} \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

Portanto

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds &= \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma \\ &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 0 dt \\ &= 0 \end{aligned}$$