Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito 3ª Prova **2013**
Data: Quarta-feira, 2 de Outubro **Turma M3**

Exercício 1 *Inicialmente, observe que o campo vetorial*

$$F(x,y) = 2x\cos y\,\mathbf{i} - x^2\mathrm{sen}\,y\,\mathbf{j}$$

é conservativo, uma vez que

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\mathbf{F} &= \nabla \times F\\ &= 0\end{aligned}$$

e o domínio de $\mathbf{F}$ *é todo o* $\mathbb{R}^2$*, que é conexo. Além disto, perceba que a curva*

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \mathrm{sen}^3 t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

é fechada, dado que

$$\gamma(0) = (1,0) = \gamma(2\pi)$$

Assim, usando o ***Teorema de Green****, segue-se que*

$$\begin{aligned}\int_\gamma 2x\cos y\,dx - x^2\mathrm{sen}\,y\,dy &= \iint_K \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\,dx\,dy\\ &= 0\end{aligned}$$

onde K *é o conjunto que compreende o interior de curva* γ*.* ■

Exercício 2 *Desejamos calcular a integral*

$$I = \int_\gamma (6x+y)dx + (y+2x)dy$$

Como o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x,y) = (6x+y)\,\mathbf{i} + (y+2x)\,\mathbf{j}$$

está definido para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*, ou seja, o domínio de* $\mathbf{F}$ *é um conjunto conexo, e a curva* γ *é fechada, podemos aplicar o* ***Teorema de Green*** *e concluir que*

$$\begin{aligned}I &= \iint_K \left[\frac{\partial(y+2x)}{\partial x} - \frac{\partial(6x+y)}{\partial y}\right] dx\,dy\\ &= \iint_K (2-1)\,dx\,dy\\ &= \iint_K dx\,dy\\ &= \acute{A}rea(K)\end{aligned}$$

onde K *é o interior da curva* γ*, ou seja* K *é um círculo de raio 2. Logo*

$$\int_\gamma (6x+y)dx + (y+2x)dy = 4\pi$$

■

Exercício 3 *Uma parametrização simples para a superfície em questão é*

$$\varphi : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{1}{2}\left(u^2 - 2v\right) \end{cases},\ (u,v) \in K$$

onde o conjunto K*, pode ser descrito como*

$$K : \begin{cases} 0 \leq u \leq 2 \\ 0 \leq v \leq 3u \end{cases}$$

Portanto, a área desta superfície, pode ser calculada pela seguinte integral

$$\begin{aligned}A &= \iint_\varphi ds\\ &= \iint_K \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\| du\,dv\end{aligned}$$

Usando a parametrização de φ, temos que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = (1, 0, u)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v} = (0, 1, -1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} = (-u, 1, 1)$$

e

$$\left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right\| = \sqrt{u^2 + 2}$$

ou seja,

$$A = \iint_K \sqrt{u^2 + 2}\, du\, dv$$

$$= \int_0^2 \int_0^{3u} \sqrt{u^2 + 2}\, dv\, du$$

$$= \int_0^2 3u\sqrt{u^2 + 2}\, du$$

$$= 6\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$$

■

Exercício 4 *Como trata-se do fluxo externo através da fronteira de uma região fechada do $\mathbb{R}^3$ e como o campo vetorial*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\,\mathbf{i} - 2xy\,\mathbf{j} + 3xz\,\mathbf{k}$$

está definido em todo o $\mathbb{R}^3$, podemos usar o ***Teorema da Divergência de Gauss*** *e, concluir que o fluxo procurado será dado por*

$$\iint_\phi \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iiint_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F}\, dx\, dy\, dz \qquad (1)$$

onde ϕ é a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ que está no primeiro octante e Ω é o interior de ϕ. Usando coordenadas esféricas, podemos descrever o conjunto Ω da seguinte forma

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

sendo

$$x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$$

$$z = \rho \cos\varphi$$

e

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} \right| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$$

Assim, voltando à equação (1), teremos

$$\iint_\phi \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iiint_\Omega (2x - 2x + 3x)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3(\rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta)\rho^2 \operatorname{sen}\varphi d\theta d\varphi d\rho$$

$$= 3\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \operatorname{sen}^2\varphi \cos\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\rho$$

$$= 3\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, d\rho$$

$$= 3\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi\, d\rho$$

$$= 3\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi\, d\rho$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^2 \rho^3 \left(\varphi - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^2 \frac{\pi}{2}\rho^3\, d\rho$$

$$= \frac{3\pi}{4} \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^2$$

$$= 3\pi$$

■

Exercício 5 *Observe inicialmente que a porção do plano*

$$x + y + z = 1$$

que está no primeiro octante, pode ser parametrizada da seguinte maneira

$$\varphi : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - u - v \end{cases}$$

onde

$$K : \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 - u \end{cases}$$

Logo,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = (1, 0, -1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = (0, 1, -1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (1, 1, 1)$$

Além disso, sendo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$$

e γ a curva que delimita a fronteira do triângulo dado em questão, ou seja, da superfície φ, segue-se, usando o ***Teorema de Stokes****, que*

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\gamma = \iint_\varphi \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$$

$$= \iint_K (-x, 0, z - 1) \cdot (1, 1, 1) du\, dv$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-u} (-u, 0, -u - v) \cdot (1, 1, 1) dv\, du$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-u} (-2u - v)\, dv\, du$$

$$= -\frac{1}{2}$$

■